

N° D'ORDRE :

78.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ,

PAR M. R. POPOFF.

1^{re} THÈSE. — SUR LE MOUVEMENT DE (108) HÉCUBE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

P. P.
Soutenues le **novembre 1912**, devant la Commission d'examen.

MM. APPELL, *Président.*

ANDOYER, }
P. PUISEUX, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

N° D'ORDRE :

78.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

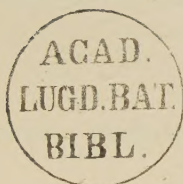
LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ,

PAR M. R. POPOFF.

1^{re} THÈSE. — SUR LE MOUVEMENT DE (108) HÉCUBE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *28* novembre 1912, devant la Commission d'examen.



MM. APPELL, *Président.*
ANDOYER, } *Examineurs.*
P. PUISEUX, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen.....	P. APPELL, professeur.	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire.....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires...	{ CH. WOLF. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
Professeurs.....	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	EMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	N.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
Professeurs adjoints.....	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire.....	D. TOMBECK.	

A MA SŒUR.

Tendre souvenir.

KYRILLE POPOFF.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556008_0032

A LA MÉMOIRE
DE
HENRI POINCARÉ.

Henri Poincaré m'avait fait le très grand honneur d'accepter la présidence de ma Thèse; j'accomplis un pieux devoir de reconnaissance en faisant hommage de mon travail à la mémoire du grand homme.

K. POPOFF.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LE MOUVEMENT DE (108) HÉCUBE.

INTRODUCTION.

La petite planète (108) Hécube, découverte par M. Luther à Düsseldorf le 2 avril 1869, attire l'attention par son moyen mouvement, qui est presque deux fois plus grand que celui de Jupiter, et par son excentricité relativement grande par rapport aux excentricités des autres planètes qui circulent à peu près à la même distance du Soleil. Les méthodes habituelles qui ont servi à Leverrier dans ses théories des grosses planètes deviennent inapplicables dans le cas d'Hécube à cause du diviseur $2n' - n$ qui apparaît déjà dans les termes du premier ordre par rapport à l'excentricité et rend les séries divergentes. L'ellipse de Képler ne représente plus le mouvement réel avec une approximation suffisante pour qu'elle puisse être prise comme une première solution; il faut lui substituer une autre courbe. Le choix de cette nouvelle orbite peut être conçu de différentes manières. Deux grands essais dans cette direction sont à signaler : ceux de Delaunay et Gylden et ceux de M. Poincaré.

Delaunay et Gylden établissent une première approximation en considérant, dès le début, dans les équations du mouvement les termes les plus importants dus à l'action de la planète troublante. Delaunay, dans sa *Théorie de la Lune*, pour avoir une telle approximation retient dans la fonction perturbatrice seulement les termes séculaires et les termes à longue période. Gylden considère, dans les équations du mouvement, les termes qui peuvent donner lieu dans les expressions des éléments aux termes élémentaires, c'est-à-dire aux termes dont les périodes sont très longues ou à peu près égales à la durée de révolution de la planète troublée et qui ne s'annulent pas avec la masse troublante. Pour les planètes caractéristiques, il conseille de considérer aussi les termes qui s'annulent avec la masse, mais qui, à cause des petits diviseurs, acquièrent des coefficients comparables à ceux des termes élémentaires.

M. Poincaré se place à un autre point de vue. Il démontre que le problème des trois corps comporte une infinité de solutions périodiques, pourvu que les masses des planètes soient suffisamment petites par rapport à la masse du Soleil. Il prouve qu'il existe trois sortes de solutions périodiques :

« Pour celles de la première sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites ; pour celles de la deuxième sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies ; enfin, pour celles de la troisième sorte, les inclinaisons ne sont plus nulles.

» Pour les unes comme pour les autres, les distances mutuelles des trois corps sont des fonctions périodiques du temps ; au bout d'une période, les trois corps se retrouvent donc dans la même situation relative, tout le système ayant seulement tourné d'un certain angle. Il faut donc, pour que les coordonnées des trois corps soient des fonctions périodiques du temps, qu'on les rapporte à un système d'axes mobiles animés d'un mouvement de rotation uniforme ⁽¹⁾. »

Il peut arriver que les conditions initiales du mouvement diffèrent très peu de celles qui correspondent à une solution périodique, et alors on peut choisir cette solution périodique pour une première approximation.

(1) H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 97.

Si pour des valeurs déterminées de $h_1, h_2, \dots, h_p$

$$x_1 = \varphi_1(t, h_1, h_2, \dots, h_p),$$

$$x_2 = \varphi_2(t, h_1, h_2, \dots, h_p),$$

.....

sont les coordonnées des trois corps dans le mouvement périodique et $x_1 = \varphi_1 + \xi_1, x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \dots$ les coordonnées dans le mouvement réel, les petites différences ξ_1, ξ_2 , auront les expressions

$$\xi_k = A_1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial h_1} + A_2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial h_2} + \dots + A_p \frac{\partial \varphi_k}{\partial h_p},$$

où $A_1, A_2, \dots$ sont des constantes d'intégration qu'on peut assimiler aux petites variations $\delta h_1, \delta h_2, \delta h_p$ qu'il faut faire subir aux valeurs de h_1, h_2, h_p pour passer du mouvement périodique au mouvement réel.

Comme on le voit, la méthode de M. Poincaré n'est pas si générale que celle de Delaunay ou de Gylden. Il est pourtant vraisemblable qu'on peut trouver toujours une solution périodique telle qu'elle diffère aussi peu qu'on le veut et pendant un temps aussi long qu'on le veut du mouvement réel. « Ce qui nous rend ces solutions si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable ⁽¹⁾. »

Les recherches de Delaunay, Gylden et M. Poincaré ont inauguré une série de travaux sur les petites planètes caractéristiques de différents types.

Nous parlerons plus tard des travaux faits d'après la méthode de Delaunay. M. Harzer, s'inspirant des idées de Gylden, traite d'une manière très approfondie le cas d'Hécube dans un Mémoire intitulé *Untersuchungen über einen speziellen Fall des Problems der drei Körper*, publié par l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg (Mémoires, t. XXXIV, n° 12). Nous nous arrêterons sur ce travail pour mettre en lumière les points les plus caractéristiques des recherches de Gylden concernant la question qui nous occupe.

En prenant comme variable indépendante la longitude vraie (ν) d'Hécube comptée dans le plan de l'orbite à partir d'un axe variable

(1) H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles*, t. I, p. 82.

choisi d'après les idées de Hansen, M. Harzer cherche à déterminer dans les expressions du rayon vecteur (r) et du sinus de la latitude héliocentrique (ζ) de la planète tous les termes de la forme

$$(A) \quad a \frac{\cos}{\sin} (\sigma v + A) \quad \text{et} \quad (B) \quad b \frac{\cos}{\sin} [(1 - \sigma)v + B],$$

où a et b , A et B sont des constantes et σ est de l'ordre de la masse troublante. Ces termes, qui ne sont que les termes élémentaires de Gylden, proviennent des parties de la fonction perturbatrice qui contiennent la masse en facteur et qui, par le procédé d'intégration, obtiennent des petits diviseurs de l'ordre de la masse. Il se propose, en outre, en se conformant toujours aux idées de Gylden, de déterminer les termes semi-élémentaires qui, dans le cas d'une commensurabilité, acquièrent des valeurs comparables à celles des termes élémentaires et par conséquent ne peuvent pas être négligés sans une analyse préalable.

Si l'on désigne par δ la petite quantité $1 - \frac{2n'}{n}$ et par d une constante de l'ordre de δ , ces termes sont de la forme

$$(C) \quad x \frac{\cos}{\sin} (dv + \Xi) \quad \text{et} \quad (D) \quad y \frac{\cos}{\sin} [(1 + d)v + H],$$

où $x \frac{\cos}{\sin} \Xi$ et $y \frac{\cos}{\sin} H$ sont des séries trigonométriques de la forme A.

Les équations du mouvement auxquelles il aboutit sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} &= \frac{1 + \rho}{1 - \eta^2} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + v}}, \quad \zeta = \frac{\varphi}{\sqrt[4]{1 + v}}, \\ \frac{dv}{dv} &= 2Q + \frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1 - \eta^2} (1 + v), \\ \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho &= \frac{1 - P}{\sqrt[4]{(1 + v)^3}} - 1 - \frac{3}{2} \frac{d\rho}{dv} \frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1 - \eta^2} + \frac{1 + \rho}{4} \frac{d}{dv} \left(\frac{\frac{dv}{dv}}{1 + v} \right) \\ &\quad - (1 + \rho) \left\{ \frac{\frac{d^2\eta^2}{dv^2}}{1 - \eta^2} + \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2}{(1 - \eta^2)^2} + \frac{1}{8} \frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1 - \eta^2} \frac{\frac{dv}{dv}}{1 + v} - \frac{1}{16} \left(\frac{\frac{dv}{dv}}{1 + v} \right)^2 \right\}, \\ k \sqrt{\frac{m_1}{a^3}} \frac{dt}{dv} &= \frac{\sqrt{(1 - \eta^2)^3}}{(1 + \rho)^2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\nu^2} + \varphi = & \frac{\zeta'}{\sqrt[3]{(1+\nu)^3}} R - \frac{\varphi}{1+\nu} \cos H R + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\eta^2}{d\nu}}{1-\eta^2} \frac{d\varphi}{d\nu} + \frac{1}{4} \varphi \frac{d}{d\nu} \left(\frac{\frac{d\nu}{d\nu}}{1+\nu} \right) \\ & - \left\{ \frac{1}{8} \frac{\frac{d\eta^2}{d\nu}}{1-\eta^2} \frac{\frac{d\nu}{d\nu}}{1+\nu} - \frac{1}{16} \left(\frac{\frac{d\nu}{d\nu}}{1+\nu} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

η^2 étant une fonction élémentaire à longue période et ν ne contenant pas de tels termes. ζ' désigne le sinus de la latitude héliocentrique de Jupiter, H la distance héliocentrique entre les deux planètes, et P , Q et R ont les expressions suivantes, Ω étant la fonction perturbatrice :

$$\begin{aligned} P &= r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ Q &= \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu}, \\ R &= \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H}. \end{aligned}$$

Si l'on connaît r , ν et ζ on obtient facilement la longitude comptée dans le plan fixe à partir d'un axe fixe. Ces quantités déterminent complètement la position de la planète pour l'instant qui correspond à ν .

M. Harzer essaie de ramener les intégrales qui se présentent dans la solution de ces équations à la forme suivante

$$\int A \cos(\lambda \nu - B) d\nu,$$

où $A \cos B$ et $A \sin B$ sont des fonctions élémentaires à longue période et où λ n'est pas de l'ordre de la masse. L'intégration par parties donne

$$\frac{A}{\lambda} \sin(\lambda \nu - B) - \frac{1}{\lambda} \int \left(\sin \lambda \nu \frac{dA \cos B}{d\nu} - \cos \lambda \nu \frac{dA \sin B}{d\nu} \right) d\nu,$$

ce qui nous ramène, après avoir effectué les dérivations indiquées sous le signe $\int$, à des intégrales de la même forme qui contiennent maintenant la masse en facteur. Si l'on traite les nouvelles intégrales de la même manière, on obtient des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la masse. C'est la raison du soin particulier que prend

M. Harzer pour éloigner des arguments toute fonction qui peut nuire à cette convergence rapide.

Après avoir trouvé l'expression de la longitude vraie (ν') de Jupiter en fonction de ν en utilisant la remarque précédente, M. Harzer cherche à intégrer l'équation en ρ . Les recherches préliminaires ayant établi que la partie principale de ρ dont la période diffère très peu de la durée de révolution de la planète est de la forme $\eta \cos [(1 - \varsigma)\nu - \pi]$, il est conduit à chercher tout d'abord la valeur de cette partie. Pour cela il met l'équation en ρ sous la forme

$$\frac{d^2\rho}{d\nu^2} + (1 - \varsigma)^2 \rho = - (2\varsigma - \varsigma^2) \rho - P - \frac{3}{4}\nu - \frac{3}{2} \frac{d\rho}{d\nu} \frac{\frac{d\eta^2}{d\nu}}{1 - \varsigma^2} + \frac{1 + \rho}{4} \frac{d^2\nu}{d\nu^2} + \dots$$

remplace dans le second membre ρ par $\eta \cos [(1 - \varsigma)\nu - \pi]$ et conserve dans P et les autres termes les parties qui peuvent donner les termes élémentaires cherchés. ς est une petite constante arbitraire dont on dispose pour éviter les termes séculaires.

Pour déterminer les termes principaux à très longue période dans l'expression de ρ on différencie la même équation, on néglige $\frac{d^3\rho}{d\nu^3}$ et $\frac{d^3\nu}{d\nu^3}$ à côté de $\frac{d\rho}{d\nu}$ et $\frac{d\nu}{d\nu}$ et l'on obtient, en prenant soin de conserver seulement les coefficients de l'ordre le plus bas par rapport à l'excentricité,

$$\frac{d\rho}{d\nu} = - \frac{dP}{d\nu} - \frac{3}{2}Q - \frac{3}{4} \frac{d\eta^2}{d\nu}.$$

Cette équation permet, après une analyse assez longue, de déterminer les termes cherchés.

Des procédés analogues servent à déterminer le sinus de la latitude. Enfin l'équation

$$\frac{dt}{d\nu} k \sqrt{\frac{m_1}{a^3}} = \frac{\sqrt{(1 - \eta^2)^3}}{(1 + \rho)^2}$$

donne ν en fonction de t ⁽¹⁾.

Revenons aux méthodes de M. Poincaré et aux travaux qu'elles ont inaugurés. S'il fallait rechercher une solution périodique qui corresponde rigoureusement à l'action perturbatrice, on verrait surgir les

(1) Callandreau a donné dans le *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 470 et suiv., une analyse très détaillée des travaux inspirés par les recherches de Gylden.

mêmes difficultés qu'on rencontre quand on veut obtenir la solution rigoureuse du problème des trois corps. Ici encore dans la pratique on est obligé de procéder par approximation et de se contenter d'une solution périodique qui ne diffère pas trop de la solution périodique considérée et qui, par conséquent, peut être prise comme une première approximation du mouvement.

Quels termes faut-il conserver dans la fonction perturbatrice pour avoir une telle solution ? M. Poincaré a fait voir ⁽¹⁾ que M. Brendel, dans sa théorie des petites planètes, a pris pour l'orbite intermédiaire une solution périodique. Or M. Brendel a employé la méthode de M. Gylden. D'autre part, M. Simonin, dans un travail remarquable sur l'orbite d'Hécube ⁽²⁾, s'est servi pour avoir une solution périodique de la méthode de Delaunay. M. Andoyer ⁽³⁾ a fait une analyse très approfondie des solutions périodiques obtenues en se servant de la méthode de Delaunay en négligeant dans la fonction perturbatrice les termes qui dépendent de l'inclinaison et de la puissance 3 par rapport à l'excentricité. Il établit différents types de solutions périodiques qui correspondent à des conditions initiales différentes. L'intégration des équations du mouvement l'amène à des fonctions elliptiques. M. Poincaré, dans un Mémoire sur la théorie d'Hécube ⁽⁴⁾, revient sur le travail de M. Simonin pour montrer quelles améliorations on peut y apporter. C'est des deux derniers Mémoires, dont nous aurons l'occasion de parler plus tard, que nous nous sommes inspiré pour établir les formules qu'on trouve dans notre travail. Comme MM. Andoyer et Simonin, nous avons considéré dans la fonction perturbatrice, conformément à la méthode de Delaunay, les termes séculaires et les termes à longue période qui correspondent aux arguments $2\zeta' - \zeta$ et $4\zeta' - 2\zeta$. En suivant les conseils de M. Andoyer nous avons évité les termes séculaires qui figurent dans les formules de M. Simonin sans avoir recours à des fonctions elliptiques.

⁽¹⁾ *Bulletin astronomique*, t. XIX, p. 177.

⁽²⁾ Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris. Voir aussi les *Annales de l'Observatoire de Nice*, t. VI.

⁽³⁾ M. ANDOYER, *Contribution à la théorie des petites planètes* (*Bulletin astronomique* t. XX, p. 321).

⁽⁴⁾ *Bulletin astronomique*, t. XIX, p. 289.

Nous attirons l'attention sur un fait. Si l'on considère nos formules page 28 ou celles de M. Simonin, on voit que dans l'expression de la longitude moyenne on a un terme $A \sin(\alpha, t + \alpha_0)$ où le coefficient A est grand et α , petit. Dans le court intervalle de temps pendant lequel on observe la planète durant une opposition, les variations de ce terme sont presque proportionnelles au temps et ses variations les plus grandes sont près de la conjonction symétrique d'Hécube avec Jupiter que nous avons choisie pour l'époque. Le moyen mouvement qu'on calcule par les procédés habituels serait le moyen mouvement augmenté de l'influence de ce terme. Mais une autre cause rend encore impossible la détermination des éléments du mouvement par des observations. En effet, en considérant l'intégrale analogue à l'intégrale $F = 0$ que nous avons obtenue page 13, Chapitre I, M. Andoyer est conduit à la conclusion suivante : « Deux courbes C (on considère x et y comme les coordonnées d'un point) correspondant à des valeurs assez voisines de μ_0 peuvent être extrêmement voisines l'une de l'autre dans une partie de leur parcours, tandis que, dans une autre partie, elles s'écartent considérablement. Cette remarque montre bien que si les observations d'une petite planète du type d'Hécube ont été faites dans les environs du moment où les différentes courbes C se distinguent peu les unes des autres, c'est-à-dire, en somme, du moment où l'angle $\psi (= 2t - 2\omega - l)$ n'est pas voisin de 180° , il est absolument impossible de compter sur ces observations pour déterminer avec quelque précision les éléments du mouvement de cette planète ⁽¹⁾. » Comme nous avons choisi pour l'époque l'instant où cet angle est zéro, les écarts entre les observations et les calculs étant petits pour des oppositions voisines de l'époque peuvent devenir considérables pour des époques éloignées. De petits changements des constantes d'intégration suffiront à faire diminuer ces écarts.

Pendant les deux années que j'ai passées à Paris, mon travail était soutenu par mes maîtres MM. Andoyer et Poincaré. M. Simonin a bien voulu me communiquer les nombres de Laplace et les lieux normaux qu'il a calculés pour ses recherches. Je leur adresse l'expression de ma profonde reconnaissance.

(1) Le travail cité de M. ANDOYER, *Bulletin astronomique*, t. XX, p. 352.

CHAPITRE I.

1. Équation du mouvement.

Dans ce travail nous avons adopté les éléments canoniques et les notations que M. Poincaré a introduits dans son Mémoire publié dans le *Bulletin astronomique*, t. XIX, p. 289. Le plan de l'orbite de Jupiter est pris comme plan fondamental.

Nous avons choisi les unités de façon que la longitude moyenne de Jupiter soit égale à t et la constante de Gauss égale à 1. Pour passer des unités communément employées aux unités choisies il faut augmenter le logarithme du temps de 3,161433 et les logarithmes des longueurs de 1,283901.

Nous désignerons par $L = \sqrt{a}$ la racine carrée du demi-grand axe de l'orbite d'Hécube et nous poserons $G = L\sqrt{1-e^2}$ et $\Theta = G \cos i$, e et i étant l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite. Les équations du mouvement seront

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dR}{dt}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{dR}{dg}, & \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{dR}{d\theta}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{dR}{dL}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dR}{dG}, & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{dR}{d\Theta}. \end{aligned}$$

l , g et θ désignent respectivement l'anomalie moyenne, la distance du périhélie au nœud et la longitude du nœud de l'orbite d'Hécube.

Représentons par A la position du Soleil, par B celle de Jupiter et par C celle d'Hécube; désignons par m la masse de Jupiter, en prenant la masse du Soleil comme unité, et par v^2 le carré de la vitesse d'Hécube. R a l'expression suivante :

$$R = \frac{1}{AC} + \frac{m}{BC} - m \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}^2} \cos(\widehat{BAC}) - \frac{v^2}{2}.$$

Si l'on pose $F = R + \Theta$, les équations du mouvement peuvent s'écrire

sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{dF}{dl}, & \frac{dG}{dt} &= \frac{dF}{dg}, & \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{dF}{d(\theta - t)}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{dF}{dL}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dF}{dG}, & \frac{d(\theta - t)}{dt} &= -\frac{dF}{d\Theta}.\end{aligned}$$

Le moyen mouvement d'Hécube étant presque deux fois plus grand que celui de Jupiter, faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\lambda &= l + g + \theta - t, & s &= -l - 2g - 2(\theta - t), & \tau &= -l - g - 2(\theta - t), \\ S &= L - G, & T &= G - \Theta, & U &= L + S + T.\end{aligned}$$

Comme

$$Ll + Gg + \Theta(\theta - t) = U\lambda + Ss + T\tau,$$

ces nouvelles variables sont canoniques et les équations du mouvement conservent leur forme canonique ; nous nous dispensons de les écrire. Enfin un dernier changement canonique de variables défini par

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2S} \cos s, & y &= \sqrt{2S} \sin s, \\ \xi &= \sqrt{2T} \cos \tau, & \eta &= \sqrt{2T} \sin \tau,\end{aligned}$$

permet d'écrire les équations du mouvement sous la forme canonique suivante

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \frac{dF}{d\lambda}, & \frac{dx}{dt} &= \frac{dF}{dy}, & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{dF}{d\eta}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{dF}{dU}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{dF}{dx}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{dF}{d\xi},\end{aligned}$$

avec

$$F = \frac{1}{AC} + \frac{m}{BC} - m \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}^2} \cos(\widehat{BAC}) - \frac{\varphi^2}{2} + \Theta.$$

On a la relation

$$\frac{1}{AC} - \frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{2L^2} \quad (1);$$

par conséquent la fonction F se simplifie et nous pouvons écrire

$$F = \frac{1}{2L^2} + \Theta + \frac{m}{BC} - m \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}^2} \cos(\widehat{BAC}).$$

(1) H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 65.

2. Développement de la fonction F.

Nous retiendrons dans le développement de la fonction F, conformément à la méthode de Delaunay, les termes séculaires et les termes à longue période. Nous nous arrêterons aux termes du deuxième degré par rapport à l'excentricité et à l'inclinaison dans la partie de F qui contient la masse en facteur et aux termes du quatrième degré par rapport aux mêmes quantités dans la partie de F qui ne contient pas la masse en facteur. Nous nous servirons du développement de la fonction perturbatrice, donné par Le Verrier dans le Tome I, pages 40 et suivantes des *Annales de l'Observatoire de Paris* ⁽¹⁾, dont nous reproduisons ici la partie qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{BC}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}^2} \cos(\widehat{BAC}) = & \frac{M_0}{2} + \frac{e}{2} M_1 \cos(2\zeta' - \zeta - \varpi) + \frac{e'}{2} M_2 \cos(2\zeta' - \zeta - \varpi') \\ & + \frac{e^2}{8} M_3 \cos 2(2\zeta' - \zeta - \varpi) + \frac{ee'}{4} M_4 \cos(\varpi - \varpi') \\ & + \frac{ee'}{4} M_5 \cos(4\zeta' - 2\zeta - \varpi - \varpi') \\ & + \frac{e'^2}{8} M_6 \cos 2(2\zeta' - \zeta - \varpi') + \frac{e^2 + e'^2}{4} M_8 \\ & + \frac{\sin^2 \frac{i}{2}}{2} M_7 \cos 2(2\zeta' - \zeta - \vartheta) - \sin^2 \frac{i}{2} M_8; \end{aligned}$$

ζ et ζ' désignent les longitudes moyennes d'Hécube et de Jupiter, ϖ et ϖ' les longitudes de leurs périhélie et i l'inclinaison mutuelle de leurs orbites. Les coefficients $M_0, M_1, M_2, \dots$ s'expriment facilement au moyen des fonctions connues des grands axes $A^{(0)}, A_1^{(0)}, \dots, A^{(1)}, A_1^{(1)}, \dots$

$$\begin{aligned} M_0 &= A^{(0)}, & M_1 &= -[4A^{(2)} + A_1^{(2)}], & M_2 &= \left[3A^{(1)} + A_1^{(1)} - 4\frac{a}{a'^2}\right], \\ M_3 &= -2[22A^{(4)} + 7A_1^{(4)} + A_2^{(4)}], & M_4 &= 2[A^{(1)} - A_1^{(1)} - A_2^{(1)}], \\ M_5 &= -2[21A^{(3)} + 7A_1^{(3)} + A_2^{(3)}], & M_6 &= 2[19A^{(2)} + 7A_1^{(2)} + A_2^{(2)}], \\ M_7 &= B^{(3)}, & M_8 &= A_1^{(0)} + A_2^{(0)} = \frac{B^{(1)}}{2}. \end{aligned}$$

Nous allons essayer de passer de ce développement de F au dévelop-

⁽¹⁾ Voir aussi F. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I. p. 309.

pement d'après les puissances des éléments x, y, ξ et η , et de remplacer partout les éléments elliptiques par les éléments canoniques que nous avons définis.

Avec l'approximation adoptée, nous pouvons prendre dans les termes qui contiennent la masse en facteur

$$e = \sqrt{\frac{2S}{L}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{L}}; \quad i^2 = 4 \sin^2 \frac{i}{2} = \frac{2T}{L} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{L}.$$

Comme

$$\zeta = l + g + \theta \quad \text{et} \quad \zeta' = l,$$

on obtient

$$\begin{aligned} e \cos (2\zeta' - \zeta - \varpi) &= \sqrt{\frac{2S}{L}} \cos s = \frac{x}{\sqrt{L}}, \\ e^2 \cos 2(2\zeta' - \zeta - \varpi) &= \frac{2S}{L} \cos 2s = \frac{x^2 - y^2}{L}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et la fonction perturbatrice se trouve exprimée au moyen de x, y, ξ, η, λ et a . En remplaçant $\sqrt{a} = L$ par sa valeur $U - S - T$, nous aurons le développement cherché. En effet, la formule de Taylor nous donne

$$f(L) = f(U) - \left(\frac{df}{dL} \right)_{L=U} (S + T) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f}{dL^2} \right)_{L=U} (S + T)^2 - \dots,$$

S et T étant de l'ordre de e^2 et i^2 , nous conserverons seulement le premier terme de cette série dans les parties de F qui contiennent la masse et l'excentricité ou l'inclinaison en facteur, les deux premiers termes dans les parties qui ne contiennent que la masse en facteur, et le terme en $(S + T)^2$ dans celle où m ne figure pas. Si nous remplaçons $S + T$ par $\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)$, nous aurons le développement suivant les puissances de x, y, ξ et η dans lequel les fonctions $A^{(0)}, A^{(1)}$, etc. sont formées de U^2 et a' de la même façon dont elles étaient formées de a et a' avant la substitution de U à L .

$$\begin{aligned} F = & A + B_1 x + C x^2 + D y^2 + E \xi^2 + H \eta^2 + K_1 e' \cos v + L_1 e' x \cos v \\ & + M_1 e' y \sin v + P_1 e'^2 + Q_1 e'^2 \cos 2v + \frac{3}{8U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 v &= \lambda - t + \varpi', \\
 A &= \frac{1}{2U^2} + U + \frac{m}{2}M_0, & B_1 &= \frac{mM_1}{2\sqrt{U}}, \\
 C &= \frac{1}{2U^3} - 1 - \frac{m}{4}\frac{dM_0}{dU} + \frac{m}{4}\frac{M_8}{U} + \frac{m}{8}\frac{M_3}{U}, \\
 D &= \frac{1}{2U^3} - 1 - \frac{m}{4}\frac{dM_0}{dU} + \frac{m}{4}\frac{M_8}{U} - \frac{m}{8}\frac{M_3}{U}, \\
 E &= \frac{1}{2U^3} - 1 - \frac{m}{4}\frac{dM_0}{dU} - \frac{m}{4}\frac{M_8}{U} + \frac{m}{8}\frac{M_7}{U}, \\
 H &= \frac{1}{2U^3} - 1 - \frac{m}{4}\frac{dM_0}{dU} - \frac{m}{4}\frac{M_8}{U} - \frac{m}{8}\frac{M_7}{U}, \\
 K_1 &= \frac{m}{2}M_2, & L_1 &= \frac{m}{4\sqrt{U}}(M_4 + M_5), & M_1 &= \frac{m}{4\sqrt{U}}(M_5 - M_4), \\
 P_1 &= \frac{m}{4}M_8, & Q_1 &= \frac{m}{8}M_6, & \Phi &= \frac{1}{2U^3} - 1 - \frac{m}{4}\frac{dM_0}{dU}.
 \end{aligned}$$

Les coefficients $B_1, K_1, L_1, \dots$ affectés de l'indice $_1$ contiennent la masse en facteur.

3. Intégration des équations du mouvement.

Premier essai. — Dans un premier essai, nous avons suivi de près le chemin que M. Poincaré a indiqué dans le Mémoire précité. Nous avons supposé dans la première approximation $e' = 0$ et nous avons négligé dans la fonction perturbatrice les termes du quatrième degré par rapport à x, y, ξ et η . Alors, la fonction F se réduit à

$$F_0 = A + B_1 x + C x^2 + D y^2 + E \xi^2 + H \eta^2,$$

et les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{dt} &= \frac{dF_0}{d\lambda} = 0, & \frac{dx}{dt} &= \frac{dF_0}{dy} = 2Dy, & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{dF_0}{d\eta} = 2H\eta, \\
 \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{dF_0}{dU}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{dF_0}{dx} = -B_1 - 2Cx, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{dF_0}{d\xi} = -2E\xi.
 \end{aligned}$$

F_0 ne dépendant pas explicitement du temps et de λ , $F_0 = \text{const.}$ sera une intégrale. Une autre intégrale de notre système d'équations différentielles nous sera donnée par $U = U_0 = \text{const.}$ B_1, C, D, E et H , étant fonctions seulement de U , seront constants, et par conséquent nous

aurons

$$\begin{aligned} x &= M\sqrt{D} \cos(2\sqrt{DC} t + \alpha_0) - \frac{B_1}{2C}, & y &= -M\sqrt{C} \sin(2\sqrt{DC} t + \alpha_0), \\ \xi &= P\sqrt{H} \cos(2\sqrt{HE} t + \beta_0), & \eta &= -P\sqrt{E} \sin(2\sqrt{HE} t + \beta_0), \end{aligned}$$

M, P, α_0, β_0 étant les constantes d'intégration.

Le cas $M = P = 0$ correspond à une solution périodique de la première sorte. En effet, on a dans ce cas $y = \xi = \eta = 0, x = -\frac{B_1}{2C}$, ce qui revient à dire que l'inclinaison de l'orbite définie par ces équations est nulle et que l'excentricité est petite.

Si l'on désigne par A', B', C' , etc. les dérivées premières de $A, B, C, \dots$ par rapport à U , l'équation en λ donnera

$$\frac{d\lambda}{dt} = -[A' + B'_1 x + C' x^2 + D' y^2 + E' \xi^2 + H' \eta^2].$$

Après avoir substitué à x, y, ξ et η leurs valeurs, on a λ par une simple quadrature :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 t + \frac{aM}{2\sqrt{DC}} \sin(2\sqrt{DC} t + \alpha_0) \\ &+ \frac{bM^2}{4\sqrt{DC}} \sin(4\sqrt{DC} t + 2\alpha_0) + \frac{cP^2}{4\sqrt{HE}} \sin(4\sqrt{HE} t + 2\beta_0) + \delta_0 \end{aligned}$$

avec

$$\lambda_0 = \frac{1}{U_0^3} - 1 - \frac{1}{2}[mM_0 + CDM^2 + EHP^2]' - \frac{C'B_1^2}{4C^2} + \frac{B_1 B'_1}{2C}$$

et

$$\begin{aligned} a &= -B'_1 \sqrt{D} + \frac{B_1 \sqrt{D} C'}{C}, \\ b &= -\frac{m}{8} \left[\left(\Phi + \frac{m}{4} \frac{M_8}{U_0} \right) \left(\frac{M_3}{U_0} \right)' - \left(\Phi + \frac{m}{4} \frac{M_8}{U_0} \right)' \left(\frac{M_3}{U_0} \right) \right], \\ c &= -\frac{m}{8} \left[\left(\Phi - \frac{m}{4} \frac{M_8}{U_0} \right) \left(\frac{M_7}{U_0} \right)' - \left(\Phi - \frac{m}{4} \frac{M_8}{U_0} \right)' \left(\frac{M_7}{U_0} \right) \right], \end{aligned}$$

δ_0 étant une nouvelle constante d'intégration.

Les parties principales de $2\Phi, 2C, 2D, 2E, 2H$ sont égales à $\frac{1}{U_0^3} - 2$.

Il nous reste à examiner l'influence des termes de la fonction perturbatrice que nous avons négligés dans la première approximation. La considération de ces termes ne présente pas de difficultés. Le terme

$\frac{3}{8U^3} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2$ donne lieu dans l'expression des éléments à des termes séculaires, qu'on évite en donnant aux arguments $2\sqrt{DC}\iota$ et $2\sqrt{EH}\iota$ de petites variations qu'on choisit convenablement.

Le calcul fait d'après des formules ainsi établies nous a donné des mouvements très considérables du périhélie et du nœud. Nous avons obtenu, par exemple, pour la longitude du nœud rapportée à l'écliptique et à l'équinoxe moyenne de 1850,0, les nombres suivants :

Opposition de		Opposition de	
1869.....	15 ⁰ .35'	1887.....	357 ⁰ .40'
1871.....	13.12	1889.....	355.20
1874.....	10.58	1892... ..	352.51
1875.....	9.40	1894.	350.26
1876.....	8.50	1895.	349.14
1877.....	7.19	1898.	346.44
1881.....	3.40	1899.....	345.32
1886.....	358.57	1901.....	343. 6

L'examen de nos formules en fera connaître la cause. Arrêtons notre attention sur les expressions de λ , x , y , ξ et η que nous avons obtenues dans la première approximation et considérons l'ordre de grandeur des coefficients et des arguments qui y figurent.

$\frac{1}{U_0^3} - 2$ peut être regardé comme étant de l'ordre de $\sqrt{m}$. Dans l'intervalle de temps que nous considérons, l'excentricité d'Hécube est un peu plus grande que 0,1 et peut être considérée comme étant de l'ordre de $\sqrt[3]{m}$. La partie principale de $2C$, $2D$, $2H$, $2E$, 2Φ , $2\sqrt{HE}$, ... étant $\frac{1}{U_0^3} - 2$, ces quantités sont de l'ordre de $\sqrt{m}$. De même, $\frac{B_1}{2C}$ est du même ordre, puisque B_1 contient la masse en facteur. D'autre part, $x^2 + y^2$ et $\xi^2 + \eta^2$ sont respectivement de l'ordre du carré de l'excentricité et de l'inclinaison. Par conséquent, $M\sqrt{D}$ et $M\sqrt{C}$ seront de l'ordre de l'excentricité ($\sqrt[3]{m}$), et $P\sqrt{H}$, $P\sqrt{E}$ de l'ordre de l'inclinaison.

Si l'on néglige les termes qui contiennent m en facteur, la partie principale de λ se réduit à

$$\lambda = \lambda_0 \iota + \delta_0 = \left[\frac{1}{U_0^3} - 1 + \frac{3}{2U_0^4} \Phi(M^2 + P^2) \right] \iota + \delta_0.$$

D'autre part,

$$\tan \tau = \frac{\eta}{\xi} = -\sqrt{\frac{E}{H}} \tan(2\sqrt{HE} + \beta_0).$$

En posant $2E = 2H = \frac{1}{U_0^3} - 2$ on obtient

$$\tau = -\left(\frac{1}{U_0^3} - 2\right)t - \beta_0,$$

et par conséquent

$$\theta = -(\lambda - 1 + \tau) = -\frac{3}{2U_0^4}[\Phi M^2 + \Phi P^2]t + \beta_0 - \delta_0.$$

Comme $M\sqrt{\Phi}$ est de l'ordre de e et $P\sqrt{\Phi}$ de l'ordre de i , la valeur approchée de θ peut être mise sous la forme suivante

$$\theta = -\frac{3}{2U_0^4}(e^2 + i^2)t + \beta_0 - \delta_0.$$

Si l'on pose $e = 0,1$, $i = 4^{\circ}23'$, $\log t = \log 365,25 + \log T + \overline{3},161433$, $\log U_0 = \overline{1},8981$, on obtient

$$\theta = -1^{\circ}50'T + \beta_0 - \delta_0,$$

c'est-à-dire un déplacement du nœud d'Hécube sur le plan de l'orbite de Jupiter de $1^{\circ}50'$ par an. On trouvera de même un déplacement considérable du périhélie.

Ces mouvements rapides du périhélie et du nœud ne correspondent pas à la réalité et tiennent à ce qu'on a négligé dans la première approximation la partie $\frac{3}{8U_0^4}(x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)$. Dans ses *Leçons de Mécanique céleste*, page 361, M. Poincaré fait remarquer qu'on n'a d'ailleurs aucune raison de négliger les termes de degré supérieur en x, y, ξ et η .

Nouvel essai. — Supposons qu'on ait le système

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dx};$$

faisons le changement de variables $x = e \cos \alpha$ et $y = -e \sin \alpha$ et admettons qu'on soit arrivé à représenter e et α par des séries trigono-

métriques, α contenant des termes séculaires, sans que e en contienne. Il est facile de voir qu'on peut représenter x et y par des séries trigonométriques qui ne contiennent pas des termes séculaires. En effet, en remplaçant e et α par leurs développements en séries, on aurait pour les expressions de x et y des sommes de la forme

$$\sum \frac{\sin}{\cos} mt \times \frac{\sin}{\cos} \left(at + b \frac{\sin}{\cos} nt + \dots \right).$$

En développant les seconds facteurs en séries d'après la formule

$$\frac{\sin}{\cos} (at + h) = \frac{\sin}{\cos} at \pm h \frac{\cos}{\sin} at = \frac{h^2}{2} \frac{\sin}{\cos} at \mp \dots,$$

et en substituant aux produits des sin et des cos leurs valeurs en sin et cos des sommes et des différences des arguments, on aura pour x et y des séries trigonométriques sans termes séculaires.

Nous nous sommes appuyé sur la remarque ci-dessus de M. Andoyer pour empêcher l'introduction de termes séculaires dans les expressions de x , y , ξ et η . Comme la considération de tous les termes de la fonction perturbatrice qui sont dus à l'action solaire ne présente pas plus de difficulté que la considération de $\frac{3}{8U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)$, nous avons préféré les garder dans nos formules et écrire la fonction perturbatrice sous la forme suivante :

$$F = F_0 + \Psi + e' \Omega + e'^2 \Xi,$$

où

$$F_0 = \frac{1}{2U^2} + U + \left[\frac{1}{2U^3} - 1 \right] (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) \\ + \frac{3}{2^3 U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 + \dots + \frac{n}{2^n U^{n+1}} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{n-1} + \dots,$$

$$\Psi = A_1 + B_1 x + \frac{C_1 + D_1}{2} (x^2 + y^2) \\ + \frac{C_1 - D_1}{2} (x^2 - y^2) + \frac{E_1 + H_1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{E_1 - H_1}{2} (\xi^2 - \eta^2),$$

$$\Omega = K_1 \cos v + L_1 x \cos v + M_1 y \sin v,$$

$$\Xi = P_1 + Q_1 \cos 2v,$$

P.

et avec

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{m}{2} M_0, & B_1 &= \frac{m M_1}{2 \sqrt{U}}, \\ C_1 &= \frac{m}{4} \left[-\frac{dM_0}{dU} + \frac{M_8}{U} + \frac{M_3}{2U} \right], & D_1 &= \frac{m}{4} \left[-\frac{dM_0}{dU} + \frac{M_8}{U} - \frac{M_3}{2U} \right], \\ E_1 &= \frac{m}{4} \left[-\frac{dM_0}{dU} - \frac{M_8}{U} + \frac{M_7}{2U} \right], & H_1 &= \frac{m}{4} \left[-\frac{dM_0}{dU} - \frac{M_8}{U} - \frac{M_7}{2U} \right], \\ K_1 &= \frac{m}{2} M_2, & L_1 &= \frac{m}{4 \sqrt{U}} (M_4 + M_5), & M_1 &= \frac{m}{4 \sqrt{U}} (M_5 - M_4), \\ P_1 &= \frac{m}{4} M_8, & Q_1 &= \frac{m}{8} M_6, & v &= \lambda - t + \varpi'. \end{aligned}$$

Si l'on néglige l'excentricité de Jupiter, les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{d(F_0 + \Psi)}{d\lambda}, & \frac{dx}{dt} &= \frac{d(F_0 + \Psi)}{dy}, & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d(F_0 + \Psi)}{d\eta}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{d(F_0 + \Psi)}{dU}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{d(F_0 + \Psi)}{dx}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{d(F_0 + \Psi)}{d\xi}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= \left[\frac{1}{U^3} - 2 + \frac{3}{2U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) \right. \\ &\quad + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{n-1} \right] y + 2 D_1 y, \\ \frac{dy}{dt} &= - \left[\frac{1}{U^3} - 2 + \frac{3}{2U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) \right. \\ &\quad + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{n-1} \right] x - B_1 - 2 C_1 x, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = & \left[\frac{1}{U^3} - 2 + \frac{3}{2U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) \right. \\ & + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 \\ & + \dots \dots \dots \\ & \left. + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{n-1} \right] \eta + 2 H_1 \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = & - \left[\frac{1}{U^3} - 2 + \frac{3}{2U^4} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) \right. \\ & + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 \\ & + \dots \dots \dots \\ & \left. + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{n-1} \right] \xi - 2 E_1 \xi. \end{aligned}$$

Ces équations sont satisfaites par $y = \xi = \eta = 0$ et $x = x_0$ déterminé par la relation

$$B_1 + \left[2C_1 + \frac{1}{U^3} - 2 \right] x_0 + \frac{3}{2U^4} x_0^3 + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} x_0^5 + \dots + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} x_0^{2n-1} = 0.$$

C'est une solution périodique de la première sorte qui correspond le mieux, comme on peut le voir d'après l'analyse de M. Andoyer ⁽¹⁾, aux conditions initiales du problème.

Elle ne diffère pas de celle adoptée par M. Poincaré et que nous avons considérée au commencement de ce Chapitre. Pour une planète, dont le moyen mouvement diffère beaucoup du moyen mouvement double de Jupiter, $x = x_0$, $y = 0$ coïncide presque avec l'origine. Dans le cas qui nous occupe, $\frac{1}{U^3} - 2$ étant très petit, x_0 est une constante de l'ordre de $\sqrt{m}$ et il y a grand intérêt à placer l'origine en ce point. En effet, si l'on pose $i = 0$ et $x = x_0 + x_1$, $y = y_1$ avec $x = \varepsilon \cos \alpha$ et $y = -\varepsilon \sin \alpha$, il n'y aura pas libration pour l'argument α . Dans ce qui suit nous prendrons x_0 un peu différent pour tenir compte de l'inclinaison de l'orbite d'Hécube.

(1) H. ANDOYER, *Contribution à la théorie des petites planètes* (Bulletin astronomique, t. XX, p. 321 et suiv.).

Posons

$$x = x_0 + x_1, \quad y = y_1.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{dU}{dt} = -e' K_1 \sin \nu - e' L_1 x_0 \sin \nu - e' L_1 x_1 \sin \nu + e' M_1 y \cos \nu - 2e'^2 Q_1 \sin 2\nu,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = & [a + C_1 + D_1] y \\ & - (C_1 - D_1) y + \frac{3}{2U^4} x_0^2 y + \frac{3}{U^4} x_0 x_1 y + e' M_1 \sin \nu + \text{termes provenant} \\ & \text{de } F_0 \text{ de l'ordre de } e^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = & -[a + C_1 + D_1] x_1 \\ & - (C_1 - D_1) x_1 - \frac{3}{2U^4} x_0^2 x_1 - \frac{3}{U^4} x_0 x_1^2 - \frac{3}{U^4} x_0^2 x_1 - e' L_1 \cos \nu + \text{termes} \\ & \text{provenant de } F_0 \text{ de l'ordre de } e^6 \\ & - B_1 - (a + 2C_1) x_0 - \frac{3 \cdot 2}{2^2 U^4} x_0^3 - \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} x_0^5 - \dots - \frac{n(n+1)}{2^n U^{n+2}} x_0^{2n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = & [a + E_1 + H_1] \eta \\ & - (E_1 - H_1) \eta + \frac{3}{2U^4} x_0^2 \eta + \frac{3}{U^4} x_0 x_1 \eta + \text{termes provenant de } F_0 \text{ de} \\ & \text{l'ordre de } e^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} = & -[a + E_1 + H_1] \xi \\ & - (E_1 - H_1) \xi - \frac{3}{2U^4} x_0^2 \xi - \frac{3}{U^4} x_0 x_1 \xi + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = & \left[a + 1 - A'_1 - B'_1 x_0 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} (x_1^2 + y^2) \right. \\ & - \frac{E'_1 + H'_1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - C'_1 x_0^2 + \frac{3}{2U^4} x_0^2 + \frac{3}{U^5} x_0^2 (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + \frac{3}{2U^5} x_0^3 \left. \right] \\ & - B'_1 x_1 - 2C'_1 x_0 x_1 - \frac{C'_1 - D'_1}{2} (x_1^2 - y^2) \\ & - \frac{E'_1 - H'_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) + \frac{3}{U^4} x_0 x_1 + \frac{6}{U^5} [x_0^2 x_1^2 + x_0^3 x_1 + x_0 x_1 (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)] \\ & - e' K'_1 \cos \nu - e' L'_1 x_1 \cos \nu \\ & - e' M'_1 y \sin \nu - e' L'_1 x_0 \cos \nu - e'^2 P'_1 - e'^2 Q'_1 \cos 2\nu + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = & \left(\frac{1}{U^3} - 2 \right) + \frac{3 \cdot 2}{2^2 U^4} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) \\ & + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U^5} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 + \dots + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2)^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Première approximation. — Dans la première approximation nous négligerons l'excentricité de Jupiter ($e' = 0$), nous poserons

$$B_1 + (a + 2C_1)x_0 + \frac{3.2}{2^2 U^4} x_0^3 + \dots + \frac{(n+1)n}{2^n U^{n+2}} x_0^{2n-1} = 0,$$

et nous ne considérerons que les premières lignes des équations du mouvement.

Dans ce cas

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

et U est une constante, que nous désignerons par U_0 .

De même

$$\begin{aligned} x_1^2 + y^2 &= e_0^2, & \xi^2 + \eta^2 &= i_0^2, \\ a &= \frac{1}{U_0^3} - 2 + \frac{3.2}{2^2 U_0^4} (e_0^2 + i_0^2) + \frac{4.3}{2^3 U_0^5} (e_0^2 + i_0^2)^2 + \dots + \frac{(n+1)n}{2^n U_0^{n+2}} (e_0^2 + i_0^2)^{n-1} \end{aligned}$$

sont des constantes, et par conséquent nous aurons

$$U = U_0,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= e_0 \cos[(a + C_1 + D_1)t + \alpha_0], & \xi &= i_0 \cos[(a + E_1 + H_1)t + \beta_0], \\ y &= -e_0 \sin[(a + C_1 + D_1)t + \alpha_0], & \eta &= -i_0 \sin[(a + E_1 + H_1)t + \beta_0], \\ \lambda &= \left[a + 1 - \frac{A'_1 + B'_1 x_0 + C'_1 x_0^2 + \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 + \frac{3}{U_0^5} x_0^2 (e_0^2 + i_0^2) + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^4 \right] t + \delta_0. \end{aligned}$$

$U_0, e_0, i_0, \alpha_0, \beta_0$ et δ_0 sont les six constantes d'intégration. On tire x_0 de l'équation ci-dessus. e_0 et i_0 sont de l'ordre de l'excentricité et de l'inclinaison.

Deuxième approximation. — Cherchons à intégrer les équations du mouvement en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon \cos \alpha, & \xi &= \iota \cos \beta, \\ y &= -\varepsilon \sin \alpha, & \eta &= -\iota \sin \beta. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\varepsilon}{dt} \cos \alpha - \frac{d\alpha}{dt} \varepsilon \sin \alpha, & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d\iota}{dt} \cos \beta - \frac{d\beta}{dt} \iota \sin \beta, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{d\varepsilon}{dt} \sin \alpha - \frac{d\alpha}{dt} \varepsilon \cos \alpha, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{d\iota}{dt} \sin \beta - \frac{d\beta}{dt} \iota \cos \beta, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} &= x_1 \frac{dx_1}{dt} + y \frac{dy}{dt}, & \iota \frac{d\iota}{dt} &= \xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt}, \\ \varepsilon^2 \frac{d\alpha}{dt} &= y \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy}{dt}, & \iota^2 \frac{d\beta}{dt} &= \eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt}.\end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ par leurs valeurs ci-dessus et $x_1, y, \dots$ par $\varepsilon \cos \alpha$, $-\varepsilon \sin \alpha, \dots$ respectivement, les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= -e'(K_1 + x_0 L_1) \sin \nu \\ &\quad - \frac{e' \varepsilon (L_1 + M_1)}{2} \sin(\nu + \alpha) - \frac{e' \varepsilon (L_1 - M_1)}{2} \sin(\nu - \alpha) - 2e'^2 Q_1 \sin 2\nu, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \left[C_1 - D_1 + \frac{3}{2U_0^4} x_0^2 \right] \varepsilon \sin 2\alpha + \frac{e'(L_1 + M_1)}{2} \sin(\nu + \alpha) - \frac{e'(L_1 - M_1)}{2} \sin(\nu - \alpha), \\ \frac{d\iota}{dt} &= \iota (E_1 - H_1) \sin 2\beta, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \left[a + C_1 + D_1 + \frac{3}{U^4} x_0^2 \right] + \left[C_1 - D_1 + \frac{3}{2U^4} x_0^2 \right] \cos 2\alpha \\ &\quad + \frac{3}{U^4} \varepsilon x_0 \cos \alpha + \frac{e'}{\varepsilon} \frac{L_1 + M_1}{2} \cos(\nu + \alpha) + \frac{e'}{\varepsilon} \frac{L_1 - M_1}{2} \cos(\nu - \alpha), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \left[a + E_1 + H_1 + \frac{3}{2U^4} x_0^2 \right] + \frac{3}{U^4} \varepsilon x_0 \cos \alpha + (E_1 - H_1) \cos 2\beta, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \left[1 + a - A'_1 - B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} \varepsilon^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} \iota^2 + \frac{3}{2U^4} x_0^2 + \frac{3}{U^5} x_0^2 (2\varepsilon^2 + \iota^2) + \frac{3}{2U^5} x_0^4 - e'^2 P'_1 \right] \\ &\quad + \varepsilon \left[\frac{3}{U^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U^5} x_0^3 + \frac{6}{U^5} x_0 (\varepsilon^2 + \iota^2) \right] \cos \alpha \\ &\quad + \left[\frac{3}{U^5} x_0^2 - \frac{C'_1 - D'_1}{2} \right] \varepsilon^2 \cos 2\alpha - \frac{\iota^2 (E'_1 - H'_1)}{2} \cos 2\beta \\ &\quad - e' (K'_1 + L'_1 x_0) \cos \nu - e' \varepsilon \frac{(L'_1 + M'_1)}{2} \cos(\nu + \alpha) \\ &\quad - e' \varepsilon \frac{(L'_1 - M'_1)}{2} \cos(\nu - \alpha) - e'^2 Q'_1 \cos 2\nu.\end{aligned}$$

Tous les termes dans les seconds membres des trois premières équations contiennent la masse en facteur, ce qui permet de remplacer ε, ι ,

α , β et λ par leurs valeurs de la première approximation e_0 , i_0 , etc. Une simple quadrature nous fera connaître U , ε et ι en fonction du temps et des six constantes d'intégration U_0 , e_0 , i_0 , α_0 , β_0 et δ_0 . Nous traiterons de même les termes dans les seconds membres des trois dernières équations, qui contiennent la masse en facteur, et nous remplacerons a par $a + \delta a$, où δa est la variation de a due à la considération des nouveaux termes dans la fonction perturbatrice.

$$\delta a = a' \left[\delta U - \frac{\delta(\varepsilon^2 + \iota^2)}{2} \right],$$

$$a' = - \left[\frac{3}{U_0^4} + \frac{2.3.4}{2^2 U_0^5} (e_0^2 + i_0^2) + \frac{3.4.5}{2^3 U_0^6} (e_0^2 + i_0^2)^2 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{2^n U_0^{n+3}} (e_0^2 + i_0^2)^{n-1} \right].$$

δU , $\delta \varepsilon^2$ et $\delta \iota^2$ désignent les changements que subissent U_0 , e_0^2 et i_0^2 par la considération des nouveaux termes de la fonction perturbatrice. Ce sont les valeurs de U , ε^2 et ι^2 qu'on tire de la première des équations ci-dessus et des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon^2}{dt} &= \varepsilon^2 \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right) \sin 2\alpha \\ &\quad + \frac{e' \varepsilon (L_1 + M_1)}{2} \sin(\nu + \alpha) - \frac{e' \varepsilon (L_1 - M_1)}{2} \sin(\nu - \alpha), \\ \frac{1}{2} \frac{d\iota^2}{dt} &= \iota^2 (E_1 - H_1) \sin 2\beta. \end{aligned}$$

Il va sans dire qu'ici il ne faut pas ajouter les constantes d'intégration U_0 , $\frac{e^2}{2}$ et $\frac{i_0^2}{2}$. Voici les expressions de U , ε , ι , etc. qu'on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \frac{e' (K_1 + L_1 x_0)}{\nu_1} \cos \nu \\ &\quad + \frac{e' e_0 (L_1 + M_1)}{2(\nu_1 + \alpha_1)} \cos(\nu + \alpha) + \frac{e' e_0 (L_1 - M_1)}{2(\nu_1 - \alpha_1)} \cos(\nu - \alpha) + \frac{e'^2 Q_1}{\nu_1} \cos 2\nu, \\ \varepsilon &= e_0 - \frac{e_0}{2\alpha_1} \left[C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right] \cos 2\alpha \\ &\quad - \frac{e' (L_1 + M_1)}{2(\nu_1 + \alpha_1)} \cos(\nu + \alpha) + \frac{e' (L_1 - M_1)}{2(\nu_1 - \alpha_1)} \cos(\nu - \alpha), \\ \iota &= i_0 - \frac{i_0 (E_1 - H_1)}{2\beta_1} \cos 2\beta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \left[a + C_1 + D_1 + \frac{3}{U_0^4} x_0^2 \right] t + \frac{e_0}{\alpha_1} \frac{3}{U_0^4} x_0 \sin \alpha \\
 &\quad + \left[C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right] \frac{1}{2 \alpha_1} \sin 2 \alpha + \frac{e'}{e_0} \frac{L_1 + M_1}{2 (\nu_1 + \alpha_1)} \sin (\nu + \alpha) \\
 &\quad + \frac{e'}{e_0} \frac{(L_1 - M_1)}{2 (\nu - \alpha)} \sin (\nu - \alpha) + \int \delta a \, dt + \alpha_0, \\
 \beta &= \left[a + E_1 + H_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right] t \\
 &\quad + \frac{e_0}{\alpha_1} \frac{3}{U_0^4} x_0 \sin \alpha + \frac{E_1 - H_1}{2 \beta_1} \sin 2 \beta + \int \delta a \, dt + \beta_0, \\
 \lambda &= \left[1 + a - A'_1 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2 - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2 \right. \\
 &\quad \left. - B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 + \frac{3}{U_0^5} x_0^2 (2 e_0^2 + i_0^2) + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^4 - e'^2 P'_1 \right] t \\
 &\quad + \frac{e_0}{\alpha_1} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2 C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \alpha \\
 &\quad + \frac{e_0^2}{2 \alpha_1} \left[\frac{3}{U_0^5} x_0^2 - \frac{C'_1 - D'_1}{2} \right] \sin 2 \alpha - \frac{i_0^2 (E'_1 - H'_1)}{4 \beta_1} \sin 2 \beta \\
 &\quad - \frac{e' (K'_1 + L'_1 x_0)}{\nu_1} \sin \nu - \frac{e' e_0 (L'_1 + M'_1)}{2 (\nu_1 + \alpha_1)} \sin (\nu + \alpha) - \frac{e' e_0 (L'_1 - M'_1)}{2 (\nu_1 - \alpha_1)} \sin (\nu - \alpha) \\
 &\quad - \frac{e'^2 Q'_1}{2 \nu_1} \sin 2 \nu + \int \delta a \, dt + \delta_0, \\
 \int \delta a \, dt &= \frac{e' a' (K_1 + L_1 x_0)}{\nu_1^2} \sin \nu + \frac{e_0^2 a'}{4 \alpha_1^2} \left[C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right] \sin 2 \alpha \\
 &\quad + \frac{i_0^2 a'}{4 \beta_1^2} (E_1 - H_1) \sin 2 \beta + \frac{e' e_0 a' (L_1 + M_1)}{(\nu_1 + \alpha_1)^2} \sin (\nu + \alpha) + \frac{e'^2 a' Q_1}{2 \nu_1^2} \sin 2 \nu,
 \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 = a + C_1 + D_1,$$

$$\beta_1 = a + E_1 + H_1,$$

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \left[a - A'_1 - B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 + \frac{3}{U_0^5} x_0^2 (e_0^2 + i_0^2) + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^4 \right].
 \end{aligned}$$

Les arguments α , β et ν sous le signe sin ou cos dans les seconds membres doivent être remplacés par

$$\alpha_1 t + \alpha_0, \quad \beta_1 t + \beta_0, \quad \nu_1 t + \varpi' + \delta_0.$$

La différence $\lambda - \beta$ détermine la longitude du nœud ascendant. On a

quelque chose d'analogue aussi pour la longitude du périhélie. Cependant l'expression de λ des formules ci-dessus contient des termes qu'on aurait retrouvés aussi dans les expressions de α et β si l'on avait poussé plus loin le développement de la fonction F en retenant un terme de plus dans la série de Taylor, page 12. Quelques-uns de ces termes prennent après l'intégration t en facteur, d'autres donnent lieu à des termes de coefficients considérables. Nous nous sommes proposé de rechercher ceux dont l'omission peut donner une idée fausse du mouvement du périhélie et du nœud. Ce sont les termes suivants :

$$\begin{aligned} & -B'_1 x(S+T) - \left(C'_1 - \frac{A''_1}{4}\right) x^2(S+T) \\ & - \left(D'_1 - \frac{A''_1}{4}\right) y^2(S+T) - \left(E'_1 - \frac{A''_1}{4}\right) \xi^2(S+T) - \left(H'_1 - \frac{A''_1}{4}\right) \eta^2(S+T) \\ & - e'(K'_1 + L'_1 x)(S+T) \cos \nu - e'M'_1 y(S+T) \sin \nu - e'^2 Q'_1(S+T) \cos 2\nu. \end{aligned}$$

En remplaçant $S+T$ par $\frac{x^2+y^2+\xi^2+\eta^2}{2}$, x par x_0+x_1 et en retenant les parties qui peuvent donner des termes cherchés, on a

$$\begin{aligned} & -\frac{B'_1}{2} x_0(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) - \frac{B'_1}{2} x_1(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) - \dots \\ & - \left(\frac{C'_1}{2} - \frac{A''_1}{8}\right) x_0^2(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) \\ & - \left(\frac{C'_1}{2} - \frac{A''_1}{8}\right) x_1^2(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) - \left(\frac{D'_1}{2} - \frac{A''_1}{8}\right) y^2(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) \\ & - \left(\frac{E'_1}{2} - \frac{A''_1}{8}\right) \xi^2(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) - \left(\frac{H'_1}{2} - \frac{A''_1}{8}\right) \eta^2(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) - \dots \\ & - e' \frac{(K'_1 + L'_1 x_0)}{2} (x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) \cos \nu \\ & - e' \frac{L'_1}{2} x_1(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) \cos \nu - e' \frac{M'_1}{2} y(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) \sin \nu \\ & - e'^2 \frac{Q'_1}{2} (x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) \cos 2\nu - \dots \end{aligned}$$

De même la partie

$$\frac{4}{2^4 U^5} [\dots + 6(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2)^2 x_0 x_1 + 6(x_1^2+y^2+\xi^2+\eta^2) x_0^2 x_1^2 + \dots]$$

de F_0 donne dans les expressions de α et β des termes que nous avons déjà dans l'expression de λ .

Les équations du mouvement, en retenant seulement les termes qui nous intéressent, doivent être complétées par

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} = & y \left[-B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} (x_1^2 + y^2) \right. \\
 & \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{A''_1}{2} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + \dots \right] \\
 & - B'_1 x_1 y - \frac{C'_1 - D'_1}{2} (x_1^2 - y^2) y - \frac{E'_1 - H'_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) y \\
 & - e' (K'_1 + L'_1 x_0) y \cos \nu - e' L'_1 x_1 y \cos \nu - e' M'_1 y y \sin \nu \\
 & - e'^2 Q'_1 y \cos 2\nu + \frac{6}{U^3} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) x_0 x_1 y + \frac{3}{U^5} x_0^2 x_1^2 y + \dots, \\
 \frac{dy}{dt} = & -x_1 \left[-B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} (x_1^2 + y^2) \right. \\
 & \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{A''_1}{2} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + \dots \right] \\
 & + B'_1 x_1 x_1 + \frac{C'_1 - D'_1}{2} (x_1^2 - y^2) x_1 + \frac{E'_1 - H'_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) x_1 \\
 & + e' (K'_1 + L'_1 x_0) x_1 \cos \nu + e' L'_1 x_1 x_1 \cos \nu + e' M'_1 y x_1 \sin \nu \\
 & + e'^2 Q'_1 x_1 \cos 2\nu - \frac{6}{U^3} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) x_0 x_1 x_1 - \frac{3}{U^5} x_0^2 x_1^2 x_1 + \dots, \\
 \frac{d\xi}{dt} = & \eta \left[-B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} (x_1^2 + y^2) \right. \\
 & \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{A''_1}{2} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + \dots \right] \\
 & - B'_1 x_1 \eta - \frac{C'_1 - D'_1}{2} (x_1^2 - y^2) \eta - \frac{E'_1 - H'_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) \eta \\
 & - e' (K'_1 + L'_1 x_0) \eta \cos \nu - e' L'_1 x_1 \eta \cos \nu - e' M'_1 y \eta \sin \nu \\
 & - e'^2 Q'_1 \eta \cos 2\nu + \frac{6}{U^3} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) x_0 x_1 \eta + \frac{3}{U^5} x_0^2 x_1^2 \eta, \\
 \frac{d\eta}{dt} = & -\xi \left[-B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} (x_1^2 + y^2) \right. \\
 & \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{A''_1}{2} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + \dots \right] \\
 & + B'_1 x_1 \xi + \frac{C'_1 - D'_1}{2} (x_1^2 - y^2) \xi + \frac{E'_1 - H'_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) \xi \\
 & + e' (K'_1 + L'_1 x_0) \xi \cos \nu + e' L'_1 x_1 \xi \cos \nu + e' M'_1 y \xi \sin \nu \\
 & + e'^2 Q'_1 \xi \cos 2\nu - \frac{6}{U^3} (x_1^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) x_0 x_1 \xi - \frac{3}{U^5} x_0^2 x_1^2 \xi.
 \end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0,$$

$$i \frac{di}{dt} = \xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = 0,$$

et par conséquent les corrections respectives de ε et i sont nulles.

Les équations

$$\varepsilon^2 \frac{d\alpha}{dt} = y \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy}{dt},$$

$$i^2 \frac{d\beta}{dt} = \eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt},$$

après la substitution à $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... de leurs expressions ci-dessus et après la substitution à x_1 , y , ... de leurs valeurs trouvées en première approximation, donnent les corrections suivantes de α et β :

$$\begin{aligned} \delta\alpha = \delta\beta = & \left[-B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2 - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2 + \frac{A''_1}{2} (e_0^2 + i_0^2) \right] t \\ & - \frac{c_0}{\alpha_1} B'_1 \sin \alpha - \frac{C'_1 - D'_1}{2} \frac{e_0^2}{2\alpha_1} \sin 2\alpha - \frac{E'_1 - H'_1}{2} \frac{i_0^2}{2\beta_1} \sin 2\beta \\ & - \frac{e' (K'_1 + L'_1 x_0)}{v_1} \sin \nu - e_0 e' \frac{(L'_1 + M'_1)}{2(v_1 + \alpha_1)} \sin(\nu + \alpha) \\ & - e_0 e' \frac{(L'_1 - M'_1)}{2(v_1 - \alpha_1)} \sin(\nu - \alpha) - \frac{e'^2 Q'_1}{2v_1} \sin 2\nu + \frac{6}{U_0^5} \frac{x_0 e_0 (e_0^2 + i_0^2)}{\alpha_1} \sin \alpha \\ & + \frac{3}{2U_0^5} x_0^2 e_0^2 \left(t + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha_1} \right). \end{aligned}$$

Tous ces termes figurent explicitement dans l'expression déjà trouvée de λ . Nous reproduisons l'ensemble des formules que nous avons trouvées ainsi :

$$a = \left[\frac{1}{U_0^3} - 2 \right] + \frac{2.3}{2^2 U_0^4} (e_0^2 + i_0^2) + \frac{3.4}{2^3 U_0^5} (e_0^2 + i_0^2)^2 + \dots + \frac{n(n+1)}{2^n U_0^{n+2}} (e_0^2 + i_0^2)^{n-1},$$

$$a' = - \left[\frac{3}{U_0^4} + \frac{2.3.4}{2^2 U_0^5} (e_0^2 + i_0^2) + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)}{2^n U_0^{n+3}} (e_0^2 + i_0^2)^{n-1} \right],$$

et

$$B_1 + (a + 2C_1)x_0 + \frac{3 \cdot 2}{2^2 U_0^4} x_0^3 + \frac{4 \cdot 3}{2^3 U_0^5} x_0^5 + \dots + \frac{n(n+1)}{2^n U_0^{n+2}} x_0^{2n+1} + \dots = 0,$$

$$\alpha_1 = a + C_1 + D_1,$$

$$\beta_1 = \alpha + E_1 + H_1,$$

$$\begin{aligned} \nu_1 = a - A'_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 + \frac{3}{U_0^5} x_0^2 (e_0^2 + i_0^2) + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^4 \\ - B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2 - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = U_0 + \frac{e'(\mathbf{K}_1 + \mathbf{L}_1 x_0)}{\nu_1} \cos \nu + \frac{e' e_0 (\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1)}{2(\nu_1 + \alpha_1)} \cos(\nu + \alpha) \\ + \frac{e' e_0 (\mathbf{L}_1 - \mathbf{M}_1)}{2(\nu_1 - \alpha_1)} \cos(\nu - \alpha) + \frac{e'^2 \mathbf{Q}_1}{\nu_1} \cos 2\nu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = e_0 - \frac{e_0}{2\alpha_1} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right) \cos 2\alpha \\ - \frac{e'(\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1)}{2(\nu_1 + \alpha_1)} \cos(\nu + \alpha) + \frac{e'(\mathbf{L}_1 - \mathbf{M}_1)}{2(\nu_1 - \alpha_1)} \cos(\nu - \alpha), \end{aligned}$$

$$i = i_0 - \frac{i_0(\mathbf{E}_1 - \mathbf{H}_1)}{2\beta_1} \cos 2\beta,$$

$$\begin{aligned} \lambda = \left[a - 1 - A'_1 - B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2 \right. \\ \left. - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2 + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^2 + \frac{3}{U_0^5} x_0^2 (2e_0^2 + i_0^2) + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^4 - e'^2 \mathbf{P}'_1 \right] t \\ + \frac{e_0}{\alpha_1} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \alpha \\ + \frac{e_0^2}{2\alpha_1} \left(\frac{3}{U_0^5} x_0^2 - \frac{C'_1 - D'_1}{2} \right) \sin 2\alpha + \mathbf{K} + \int \delta a \, dt + \delta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = \left[a + C_1 + D_1 - B'_1 x_0 - C'_1 x_0^2 - \frac{C'_1 + D'_1}{2} e_0^2 - \frac{E'_1 + H'_1}{2} i_0^2 \right. \\ \left. + \frac{3}{U_0^4} x_0^2 + \frac{3}{U_0^5} x_0^2 \left(\frac{3e_0^2}{2} + i_0^2 \right) + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^4 + \frac{1}{2} A''_1 (e_0^2 + i_0^2) \right] t \\ + \frac{e_0}{\alpha_1} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \alpha \\ + \frac{1}{2\alpha_1} \left[C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 - \frac{C'_1 - D'_1}{2} e_0^2 + \frac{3}{2 U_0^5} x_0^2 e_0^2 \right] \sin 2\alpha \\ + \frac{e'}{e_0} \frac{\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1}{2(\nu_1 + \alpha_1)} \sin(\nu + \alpha) + \frac{e'}{e_0} \frac{\mathbf{L}_1 - \mathbf{M}_1}{2(\nu_1 - \alpha_1)} \sin(\nu - \alpha) + \mathbf{K} + \int \delta a \, dt + \alpha_0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \beta = & \left[a + \mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_1 - \mathbf{B}'_1 x_0 - \mathbf{C}'_1 x_0^2 - \frac{\mathbf{C}'_1 + \mathbf{D}'_1}{2} e_0^2 - \frac{\mathbf{E}'_1 + \mathbf{H}'_1}{2} i_0^2 \right. \\
 & + \frac{3}{2 \mathbf{U}_0^4} x_0^3 + \frac{3}{\mathbf{U}_0^5} x_0^2 \left(\frac{3 e_0^2}{2} + i_0^2 \right) + \frac{3}{2 \mathbf{U}_0^5} x_0^4 + \frac{1}{8} \mathbf{A}_1'' (e_0^2 + i_0^2) \Big] t \\
 & + \frac{e_0}{\alpha_1} \left[\frac{3}{\mathbf{U}_0^4} x_0 - \mathbf{B}'_1 + \frac{6}{\mathbf{U}_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \alpha \\
 & + \frac{e_0^2}{2 \alpha_1} \left[\frac{3}{2 \mathbf{U}_0^5} x_0^2 - \frac{\mathbf{C}'_1 - \mathbf{D}'_1}{2} \right] \sin 2 \alpha + \frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{H}_1}{2 \beta_1} \sin 2 \beta + \mathbf{K} + \int \delta a dt + \beta_0, \\
 \mathbf{K} = & - \frac{\mathbf{E}'_1 - \mathbf{H}'_1}{2} \frac{i_0^2}{2 \beta_1} \sin 2 \beta - \frac{e' (\mathbf{K}'_1 + \mathbf{L}'_1 x_0)}{\nu_1} \sin \nu \\
 & - \frac{e' e_0 (\mathbf{L}'_1 + \mathbf{M}'_1)}{2 (\nu_1 + \alpha_1)} \sin (\nu + \alpha) - \frac{e' e_0 (\mathbf{L}'_1 - \mathbf{M}'_1)}{2 (\nu_1 - \alpha_1)} \sin (\nu - \alpha) - \frac{e'^2 \mathbf{Q}'_1}{2 \nu_1} \sin 2 \nu, \\
 \int \delta a dt = & \frac{e' a' (\mathbf{K}_1 + \mathbf{L}_1 x_0)}{\nu_1^2} \sin \nu + \frac{e_0^2 a'}{4 \alpha_1^2} \left[\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_1 + \frac{3}{2 \mathbf{U}_0^4} x_0^2 \right] \sin 2 \alpha \\
 & + \frac{i_0^2 a'}{4 \beta_1^2} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{H}_1) \sin 2 \beta + \frac{e' e_0 a' (\mathbf{L}_1 + \mathbf{M}_1)}{(\nu_1 + \alpha_1)^2} \sin (\nu + \alpha) + \frac{e'^2 a' \mathbf{Q}_1}{2 \nu_1^2} \sin 2 \nu.
 \end{aligned}$$

Les arguments α , β et ν des sinus et des cosinus dans les seconds membres doivent être remplacés par

$$\alpha_1 t + \alpha_0, \quad \beta_1 t + \beta_0, \quad \nu_1 t + \nu' + \delta_0.$$

Enfin les relations

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \varepsilon \cos \alpha, & \xi &= \iota \cos \beta, \\
 y &= -\varepsilon \sin \alpha, & \eta &= -\iota \sin \beta,
 \end{aligned}$$

où ε , ι , α et β ont les valeurs déterminées par les formules ci-dessus donnent pour x , y , ξ et η des séries trigonométriques sans termes séculaires.

Perturbations à courte période. — Nous désignons par $\mathbf{F}_i$ l'ensemble des termes à courte période de la fonction perturbatrice.

Dans le cas d'Hécube les perturbations à courte période les plus considérables proviennent des termes suivants de $\mathbf{F}_i$

$$\begin{aligned}
 (\text{I}) \quad & + m \sum \mathbf{E}_i \cos i(\zeta' - \zeta) \\
 & (i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5);
 \end{aligned}$$

et

$$(II) \quad + m \frac{e}{2} \sum A_i \cos[i\zeta' - (i-1)\zeta - \varpi] \\ (i=0, \dots, 5);$$

$$(III) \quad + m \frac{e'}{2} \sum B_i \cos[(i+1)\zeta' - i\zeta - \varpi'] \\ (i=0, \dots, 4);$$

$$(IV) \quad + m \frac{e^2}{8} \sum C_i \cos[i\zeta' - (i-2)\zeta - 2\varpi] \\ (i=3, 4, 5; i=5 \text{ dans le cas de } \lambda \text{ et } U);$$

$$(V) \quad + m \frac{ee'}{4} \sum D_i \cos[(i+1)\zeta' - (i-1)\zeta - \varpi' - \varpi] \\ (i=2, 3, 4; i=4 \text{ dans le cas de } \lambda \text{ et } U).$$

Les notations sont celles de la page 11.

Exprimées en fonction des variables U , x , y , ξ , η et λ , ces termes peuvent s'écrire

$$(I) \quad + 2m \sum E_i \cos i\lambda \\ (i=+1, \dots, 5);$$

$$(II) \quad + \frac{mx}{2\sqrt{U}} \sum A_i \cos(i-2)\lambda + \frac{my}{2\sqrt{U}} \sum A_i \sin(i-2)\lambda \\ (i=0, \dots, 5);$$

$$(III) \quad + m \frac{e'}{2} \sum B_i \cos(i\lambda - t + \varpi') \\ (i=0, \dots, 4);$$

$$(IV) \quad \frac{m}{8U} \sum C_i [x^2 \cos(i-4)\lambda - y^2 \cos(i-4)\lambda + 2xy \sin(i-4)\lambda] \\ (i=3, \dots, 5; i=5 \text{ dans le cas de } \lambda \text{ et } U);$$

$$(V) \quad + \frac{me'}{4\sqrt{U}} \sum D_i \{ x \cos[(i-2)\lambda - t + \varpi'] + y \sin[(i-2)\lambda - t + \varpi'] \} \\ (i=2, \dots, 4; i=4 \text{ dans le cas de } U \text{ et } \lambda).$$

Les coefficients A_i , B_i , ... ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A_i &= -2iA^{(i)} - A_1^{(i)}, \\ B_i &= (2i+1)A^{(i)} + A_1^{(i)}, \\ C_i &= (4i^2 - 5i)A^{(i)} + (4i-2)A_1^{(i)} + 2A_2^{(i)}, \\ D_i &= (-4i^2 - 2i)A^{(i)} + (-4i-2)A_1^{(i)} - 2A_2^{(i)}, \\ E_i &= \frac{A^{(i)}}{2}, \end{aligned}$$

Dans ces formules, on ne doit pas donner à i les valeurs correspondant aux perturbations à longue période. Les coefficients $A^{(i)}$ et $A_1^{(i)}$ doivent être corrigés de $-\frac{U^2}{a'^2}$.

Désignons par U, λ, x, y les valeurs des inconnues que nous avons obtenues dans la première approximation, et par $\delta U, \delta \lambda, \delta x$ et δy l'ensemble des termes dus à la considération de F_1 . Les équations du mouvement prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta U}{dt} &= \delta \frac{dF_0}{d\lambda} + \frac{dF_1}{d\lambda}, & \frac{d\delta x}{dt} &= \delta \frac{dF_0}{dy} + \frac{dF_1}{dy}, & \frac{d\delta \xi}{dt} &= \delta \frac{dF_0}{d\eta} + \frac{dF_1}{d\eta}, \\ \frac{d\delta \lambda}{dt} &= -\delta \frac{dF_0}{dU} - \frac{dF_1}{dU}, & \frac{d\delta y}{dt} &= -\delta \frac{dF_0}{dx} - \frac{dF_1}{dx}, & \frac{d\delta \eta}{dt} &= -\delta \frac{dF_0}{d\xi} - \frac{dF_1}{d\xi}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{d\delta U}{dt} &= + \frac{dF_1}{d\lambda}, & \frac{d\delta x}{dt} &= \delta(a y) + \frac{dF_1}{dy}, & \frac{d\delta \xi}{dt} &= \delta(a \eta), \\ \frac{d\delta \lambda}{dt} &= + \delta a - \frac{dF_1}{dU}, & \frac{d\delta y}{dt} &= -\delta(a x) - \frac{dF_1}{dx}, & \frac{d\delta \eta}{dt} &= -\delta(a \xi). \end{aligned}$$

Tous les termes des équations en U, ε et ι contiennent la masse en facteur, mais dans les équations en λ, α et β figure le terme a qui ne la contient pas en facteur et qui a donné lieu à l'ensemble des termes à longue période que nous avons désignés par $\int \delta a dt$. Ce même terme donne lieu dans les expressions de λ, α et β à des termes à courte période que nous désignerons de même par $\int \delta a dt$, ce qui nous permet de réduire les équations en x, y, ξ et η , et de les écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} - a \delta y &= \frac{dF_1}{dy}, & \frac{d\delta \xi}{dt} - a \delta \eta &= 0, \\ \frac{d\delta y}{dt} + a \delta x &= -\frac{dF_1}{dx}, & \frac{d\delta \eta}{dt} + a \delta \xi &= 0. \end{aligned}$$

Le calcul de $\int \delta a dt$ exige la connaissance de $\delta \varepsilon^2$ et $\delta \iota^2$, qui sont donnés par

$$\frac{1}{2} \frac{d\delta \varepsilon^2}{dt} = x_1 \frac{dF_1}{dy} - y \frac{dF_1}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \frac{d\delta \iota^2}{dt} = \xi \frac{dF_1}{d\eta} - \eta \frac{dF_1}{d\xi} = 0.$$

Ces équations donnent les perturbations à courte période sui-

vantes :

$$\begin{aligned} \delta U = & + 2m \sum \frac{E_i}{\lambda_1} \cos i\lambda + \frac{m}{2\sqrt{U_0}} \sum \Lambda_i (i-2) \left\{ \frac{e_0 \cos[(i-2)\lambda + \alpha]}{(i-2)\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{x_0 \cos(i-2)\lambda}{(i-2)\lambda_1} \right\} \\ & + \frac{me'}{2} \sum B_i \frac{i}{i\lambda_1 - 1} \cos[i\lambda - t - \varpi'] \\ & + \frac{m}{8U_0} \sum C_i (i-4) \left\{ \frac{e_0^2 \cos[(i-4)\lambda + 2\alpha]}{(i-4)\lambda_1 + 2\alpha_1} + \frac{2x_0 e_0 \cos[(i-4)\lambda + \alpha]}{(i-4)\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{x_0^2 \cos(i-4)\lambda}{(i-4)\lambda_1} \right\} \\ & + \frac{me'}{4\sqrt{U_0}} \sum D_i (i-2) \left\{ \frac{e_0 \cos[(i-2)\lambda + \alpha - t + \varpi']}{(i-2)\lambda_1 + \alpha_1 - 1} + \frac{x_0 \cos[(i-2)\lambda - t + \varpi']}{(i-2)\lambda_1 - 1} \right\}, \\ \delta \lambda = & - 2m \sum \frac{E'_i \sin i\lambda}{i\lambda_1} - \frac{m}{2} \sum \left[\frac{\Lambda_i}{\sqrt{U_0}} \right]' \left\{ \frac{e_0 \sin[(i-2)\lambda + \alpha]}{(i-2)\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{x_0 \sin(i-2)\lambda}{(i-2)\lambda_1} \right\} \\ & - \frac{me'}{2} \sum B'_i \frac{\sin[i\lambda - t + \varpi']}{i\lambda_1 - 1} \\ & - \frac{m}{8} \sum \left[\frac{C_i}{U_0} \right]' \left\{ \frac{e_0^2 \sin[(i-4)\lambda + 2\alpha]}{(i-4)\lambda_1 + 2\alpha_1} + \frac{2e_0 x_0 \sin[(i-4)\lambda + \alpha]}{(i-4)\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{x_0^2 \sin(i-4)\lambda}{(i-4)\lambda_1} \right\} \\ & - \frac{me'}{4} \sum \left[\frac{D_i}{\sqrt{U_0}} \right]' \left\{ \frac{e_0 \sin[(i-2)\lambda - t + \alpha + \varpi']}{(i-2)\lambda_1 + \alpha_1 - 1} + \frac{x_0 \sin[(i-2)\lambda - t + \varpi']}{(i-2)\lambda_1 - 1} \right\}. \end{aligned}$$

L'indice ' désigne les dérivées par rapport à U.

$$\begin{aligned} \delta x = & - \frac{m}{2} \sum \frac{\Lambda_i}{\sqrt{U_0}} \frac{\cos(i-2)\lambda}{(i-2)\lambda_1 + \alpha} - \frac{m}{4} \sum \frac{C_i}{U_0} \left\{ \frac{e_0 \cos[(i-4)\lambda + \alpha]}{(i-4)\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha} + \frac{x_0 \cos(i-4)\lambda}{(i-4)\lambda_1 + \alpha} \right\} \\ & - \frac{me'}{4} \sum \frac{D_i}{\sqrt{U_0}} \frac{\cos[(i-2)\lambda - t + \varpi']}{(i-2)\lambda_1 - 1 + \alpha}, \\ \delta y = & - \frac{m}{2} \sum \frac{\Lambda_i}{\sqrt{U_0}} \frac{\sin(i-2)\lambda}{(i-2)\lambda_1 + \alpha} - \frac{m}{4} \sum \frac{C_i}{U_0} \left\{ \frac{e_0 \sin[(i-4)\lambda + \alpha]}{(i-4)\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha} + \frac{x_0 \sin(i-4)\lambda}{(i-4)\lambda_1 + \alpha} \right\} \\ & - \frac{me'}{4} \sum \frac{D_i}{\sqrt{U_0}} \frac{\sin[(i-2)\lambda - t + \varpi']}{(i-2)\lambda_1 - 1 + \alpha}. \end{aligned}$$

λ , α et β doivent être corrigées encore de

$$\begin{aligned} \int \delta a \, dt = & - 2ma' \sum \frac{E_i}{i\lambda_1^2} \sin i\lambda + \frac{ma'}{2} \sum \frac{\Lambda_i}{\sqrt{U_0}} \left\{ \frac{(i-1)e_0 \sin[(i-2)\lambda + \alpha]}{[(i-2)\lambda_1 + \alpha_1]^2} + \frac{x_0 \sin(i-2)\lambda}{(i-2)\lambda_1^2} \right\} \\ & + \frac{ma'e'}{2} \sum \frac{B_i i}{(i\lambda_1 - 1)^2} \sin[i\lambda - t + \varpi'] \\ & + \frac{ma'}{8} \sum \frac{C_i}{U_0} \left\{ \frac{(i-2)e_0^2 \sin[(i-4)\lambda + 2\alpha]}{[(i-4)\lambda_1 + 2\alpha_1]^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(i-3)x_0 e_0 \sin[(i-4)\lambda + \alpha]}{[(i-4)\lambda_1 + \alpha_1]^2} + \frac{x_0^2 \sin(i-4)\lambda}{(i-4)^2 \lambda_1^2} \right\} \\ & + \frac{ma'e'}{4} \sum \frac{D_i}{\sqrt{U_0}} \left\{ \frac{(i-1)e_0 \sin[(i-2)\lambda + \alpha - t + \varpi']}{[(i-2)\lambda_1 + \alpha_1 - 1]^2} + \frac{(i-2)x_0 \sin[(i-2)\lambda - t + \varpi']}{[(i-2)\lambda_1 - 1]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Perturbations à longue période, qui contiennent le carré de la masse en facteur. — Dans le calcul numérique nous avons considéré aussi des termes contenant le carré de la masse en facteur et qui nous ont paru avoir une influence assez considérable sur les résultats.

Nos équations du mouvement sont de la forme

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3), \\ \frac{dy_i}{dt} &= a + \varphi_i(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3), \\ i &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

où tous les termes de f_i et φ_i contiennent la masse en facteur, a étant une fonction des x_i , laquelle ne contient pas la masse en facteur.

Dans f_i remplaçons x_i et y_i par leurs valeurs en seconde approximation. Une simple quadrature nous donnera x_i en troisième approximation. En remplaçant ensuite dans la fonction φ_i x_i et y_i par leurs valeurs en seconde approximation et dans a x_i par leurs valeurs en troisième approximation, nous aurons par une simple quadrature y_i en troisième approximation. C'est le principe qui nous a guidé dans la recherche des termes qui contiennent le carré de la masse en facteur.

Nous ferons une petite remarque concernant la troisième équation du mouvement page 20. Nous avons déterminé la constante x_0 de

$$B_1 + (a + 2C_1)x_0 + \frac{3 \cdot 2}{2^2 U^4} x_0^3 + \dots = 0,$$

la valeur de a étant donnée page 21.

Comme U , ε et ι ne sont pas des constantes, l'influence de cette partie de l'équation en y se fera sentir dans les termes qui contiennent le carré de la masse en facteur. Nous avons tenu compte de cette influence.

Nous reproduisons ici les termes dont nous nous sommes servi dans les calculs numériques :

$$\begin{aligned}\delta U = & - \frac{e_0 e' (K_1 + L_1 x_0)}{2 \alpha_1 (v_1 - \alpha_1)} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \cos(\nu - \alpha) \\ & - \frac{e_0 e' (L_1 + M_1)}{4 \alpha_1 (v_1 - \alpha_1)} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2 U_0^4} x_0^2 \right) \cos(\nu - \alpha) \\ & + \frac{e'^2 (L_1 + M_1) (L_1 - M_1) \alpha_1}{4 v_1 (v_1 + \alpha_1) (v_1 - \alpha_1)} \cos 2\nu\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \delta\varepsilon = & + \frac{3}{4} \frac{e_0^2}{\alpha_1^2} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2} \frac{x_0^2}{U_0^4} \right) \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \cos \alpha \\
 & - \frac{e'^2 (L_1 + M_1) (L_1 - M_1)}{8 e_0 (\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \cos 2\nu + \frac{e'^2 (L_1 + M_1) (L_1 - M_1)}{8 e_0 (\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \cos 2\alpha \\
 & - \frac{e' (K_1 + L_1 x_0)}{2 \nu_1 (\nu_1 - \alpha_1)} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 \right] \cos(\nu - \alpha) \\
 & - \frac{e' (L_1 + M_1)}{2 (\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2} \frac{x_0^2}{U_0^4} \right) \cos(\nu - \alpha) \\
 & - \frac{e'^2 (L_1 - M_1)^2}{16 e_0 (\nu_1 - \alpha_1)^2} \cos 2(\nu - \alpha), \\
 \delta\lambda = & - \frac{e_0^2}{2 \alpha_1} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 \right] \\
 & \times \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \left(t - \frac{\sin 2\alpha}{2 \alpha_1} \right) \\
 & - \frac{a'}{4} \left[\frac{e_0^2}{4 \alpha_1^2} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2} \frac{x_0^2}{U_0^4} \right)^2 + \frac{e'^2 (L_1 + M_1)^2}{4 (\nu_1 + \alpha_1)^2} + \frac{e'^2 (L_1 - M_1)^2}{4 (\nu_1 - \alpha_1)^2} \right] t \\
 & + \frac{e' (L_1 - M_1)}{2 (\nu_1 - \alpha_1) \nu_1} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \nu \\
 & - \frac{e' (L_1 + M_1)}{2 (\nu_1 + \alpha_1) \nu_1} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \nu \\
 & - \frac{e_0}{2 \alpha_1^2} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2} \frac{x_0^2}{U_0^4} \right) \\
 & \times \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \alpha \\
 & - \frac{a' e_0 e' (L_1 + M_1)}{2 \alpha_1 (\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2} \frac{x_0^2}{U_0^4} \right) \sin(\nu - \alpha) \\
 & - \frac{a' e_0 e' (K_1 + L_1 x_0)}{2 \alpha_1 \nu_1 (\nu_1 - \alpha_1)} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin(\nu - \alpha) \\
 & + \frac{a' e'^2 (L_1 + M_1) (L_1 - M_1)}{8 \nu_1^2 (\nu_1 - \alpha_1)} \sin 2\nu.
 \end{aligned}$$

Les mêmes termes de λ avec des coefficients faiblement changés se trouvent aussi dans les expressions de α et de β . Dans l'expression de α

on a de plus

$$\begin{aligned}
 \delta\alpha = & -\frac{1}{2\alpha_1} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2U_0} x_0^2 \right)^2 t \\
 & - \frac{e' (L_1 + M_1) (\nu_1 + 2\alpha_1)}{2\alpha_1 \nu_1 (\nu_1 + \alpha_1)} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \nu \\
 & - \frac{5}{4} \frac{e_0}{\alpha_1^2} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2U_0} x_0^2 \right) \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin \alpha \\
 & + \frac{e' (L_1 - M_1)}{2e_0 (\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2U_0} x_0^2 \right) \sin (\nu + \alpha) \\
 & - \frac{e' (K_1 + L_1 x_0)}{2e_0 \nu_1 (\nu_1 + \alpha_1)} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin (\nu + \alpha) \\
 & - \frac{e' (L_1 + M_1)}{2e_0 (\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \left(C_1 - D_1 + \frac{3}{2U_0} x_0^2 \right) \sin (\nu - \alpha) \\
 & - \frac{e' (K_1 + L_1 x_0)}{e_0} \frac{1}{2\nu_1 (\nu_1 - \alpha_1)} \left[\frac{3}{U_0^4} x_0 - B'_1 - 2C'_1 x_0 + \frac{6}{U_0^5} x_0^3 + \frac{6}{U_0^5} x_0 (e_0^2 + i_0^2) \right] \sin (\nu - \alpha) \\
 & - \frac{e'^2}{e_0^2} \frac{(L_1 + M_1) (L_1 - M_1)}{4(\nu_1 + \alpha_1) (\nu_1 - \alpha_1)} \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE II.

Formules différentielles.

Établissons les formules différentielles qui serviront à corriger les valeurs numériques des constantes d'intégration adoptées dans les premiers calculs. Représentons les différences entre les coordonnées polaires équatoriales observées et calculées par les accroissements de U_0 , e_0 , i_0 , α_0 , β_0 et δ_0 , que nous considérerons comme de petites quantités du premier ordre.

Nous pouvons considérer l'ascension droite ($\mathcal{R}$) et la déclinaison ($\mathcal{D}$) d'Hécube comme des fonctions des six constantes d'intégration et du temps

$$\mathcal{R} = f_1 (U_0, e_0, i_0, \alpha_0, \beta_0, \delta_0; t),$$

$$\mathcal{D} = f_2 (U_0, e_0, i_0, \alpha_0, \beta_0, \delta_0; t).$$

Il s'agit de trouver les expressions analytiques de $\frac{\partial f_1}{\partial U_0}, \frac{\partial f_2}{\partial U_0}, \frac{\partial f_1}{\partial e_0}, \frac{\partial f_2}{\partial e_0}, \dots$ dans les formules

$$\begin{aligned} d\mathcal{R} &= \frac{\partial f_1}{\partial U_0} dU_0 + \frac{\partial f_1}{\partial e_0} de_0 + \frac{\partial f_1}{\partial i_0} di_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \beta_0} d\beta_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_0} d\delta_0, \\ d\mathcal{Q} &= \frac{\partial f_2}{\partial U_0} dU_0 + \frac{\partial f_2}{\partial e_0} de_0 + \frac{\partial f_2}{\partial i_0} di_0 + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 + \frac{\partial f_2}{\partial \beta_0} d\beta_0 + \frac{\partial f_2}{\partial \delta_0} d\delta_0. \end{aligned}$$

Soient :

φ la distance d'Hécube à la Terre, r le rayon vecteur d'Hécube,
 ν l'anomalie vraie, E l'anomalie excentrique,
 a le demi-grand axe, μ le moyen mouvement,
 $e = \sin \varphi$ l'excentricité,
 t_0 et M_0 l'époque et l'anomalie moyenne à l'époque,
 $l = M_0 + t.\mu$ l'anomalie moyenne à l'instant t ,
 θ, g et i la longitude du nœud, la distance du périhélie au nœud et
l'inclinaison rapportées au plan de l'orbite de Jupiter,
 $\mathcal{Q}, \omega$ et ι les mêmes éléments rapportés à l'équateur.

Les formules différentielles qui servent dans les cas ordinaires pour exprimer $d\mathcal{R}$ et $d\mathcal{Q}$ en fonction des variations des éléments elliptiques sont les suivantes (1)

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin b \sin B = - \sin (\mathcal{R} - \mathcal{Q}), \\ \sin b \cos B = + \cos \iota \cos (\mathcal{R} - \mathcal{Q}), \\ \cos b = - \sin \iota \cos (\mathcal{R} - \mathcal{Q}), \\ \sin c \sin C = - \sin \mathcal{Q} \cos (\mathcal{R} - \mathcal{Q}), \\ \sin c \cos C = + \sin \iota \cos \mathcal{Q} - \cos \iota \sin \mathcal{Q} \sin (\mathcal{R} - \mathcal{Q}), \\ \cos c = + \cos \iota \cos \mathcal{Q} + \sin \iota \sin \mathcal{Q} \sin (\mathcal{R} - \mathcal{Q}); \end{array} \right.$$

$\sin b$ et $\sin c$ sont positifs.

$$\frac{2}{3} \sqrt{a} = K.$$

$$\begin{array}{ll} \frac{a}{\rho} \sin b \cos (B + \omega + \nu) = F_c^\alpha, & \frac{a}{\rho} \sin c \cos (C + \omega + \nu) = F_c^\delta, \\ \frac{a}{\rho} \sin b \sin (B + \omega + \nu) = F_s^\alpha, & \frac{a}{\rho} \sin c \sin (C + \omega + \nu) = F_s^\delta, \\ \frac{a}{\rho} \sin b \cos (B + \omega) = G_c^\alpha, & \frac{a}{\rho} \sin c \cos (C + \omega) = G_c^\delta \end{array}$$

(1) JULIUS BAUSCHINGER, *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, p. 442.

et

$$\begin{aligned} \frac{a}{\rho} \sin b \sin (B + \omega) &= G_s^\alpha, & \frac{a}{\rho} \sin c \sin (C + \omega) &= G_s^\delta, \\ \frac{1}{\rho} \cos b r \cos \nu &= H_c^\alpha, & \frac{1}{\rho} \cos c r \cos \nu &= H_c^\delta, \\ \frac{1}{\rho} \cos b r \sin \nu &= H_s^\alpha, & \frac{1}{\rho} \cos c r \sin \nu &= H_s^\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \Omega dR &= [F_c^\alpha + \sin \varphi G_c^\alpha] \sec \varphi dM_0 + [(F_c^\alpha + \sin \varphi G_c^\alpha) \sec \varphi t - K r F_s^\alpha] d\mu \\ &\quad + [\sin E F_c^\alpha - \cos \varphi G_s^\alpha] d\varphi + F_c^\alpha \frac{r}{a} ds + H_s^\alpha dp - H_c^\alpha dq, \\ d\Omega &= [F_c^\delta + \sin \varphi G_c^\delta] \sec \varphi dM_0 + [(F_c^\delta + \sin \varphi G_c^\delta) \sec \varphi t - K r F_s^\delta] d\mu \\ &\quad + [\sin E F_c^\delta - \cos \varphi G_s^\delta] d\varphi + F_c^\delta \frac{r}{a} ds + H_s^\delta dp - H_c^\delta dq, \end{aligned}$$

où $F_c^\alpha, F_c^\delta, \dots, H_c^\alpha, H_c^\delta, \dots$ sont calculés avec les éléments rapportés à l'équateur. dp, dq, ds désignent les petites rotations autour de trois axes rectangulaires, ayant comme origine le centre du Soleil, qu'il faut donner au plan de l'orbite adoptée dans les calculs pour le faire coïncider avec le plan de l'orbite réelle. Les axes sont choisis de manière que le premier soit dirigé vers le périhélie d'Hécube, le deuxième vers le point de 90° d'anomalie vraie et le troisième vers le pôle nord de l'orbite. Prenons comme plan fondamental le plan de l'orbite de Jupiter : dp, dq et ds seront donnés par

$$\begin{aligned} dp &= \cos g di + \sin i \sin g d\theta, \\ dq &= -\sin g di + \sin i \cos g d\theta, \\ ds &= -\tan \frac{i}{2} \sin i d\theta + d(g + \theta). \end{aligned}$$

Dans ces formules figure la variation dM_0 de l'anomalie moyenne à l'époque, tandis que les formules du Chapitre I nous donnent la différence des longitudes moyennes d'Hécube et de Jupiter sans contenir M_0 . Nous ferons disparaître dM_0 en introduisant à sa place la variation de l'anomalie moyenne à l'instant t au moyen des relations

$$dl = dM_0 + t d\mu \quad \text{et} \quad \mu = \frac{t}{L^3}.$$

Si nous remplaçons ensuite dp, dq et ds par leurs valeurs, nous

aurons

$$\begin{aligned}
 \cos \Theta dR = & [F_c^\alpha + \sin \varphi G_s^\alpha] \sec \varphi dl \\
 & - Kr F_s^\alpha d\mu \\
 & + [\sin E F_c^\alpha - \cos \varphi G_s^\alpha] d\varphi \\
 & + \left[-F_c^\alpha \frac{r}{a} \tan g \frac{i}{2} + H_s^\alpha \sin g - H_c^\alpha \cos g \right] \sin i d\theta \\
 & + F_c^\alpha \frac{r}{a} d(\theta + g) \\
 & + [H_s^\alpha \cos g + H_c^\alpha \sin g] di, \\
 d\Theta = & [F_c^\delta + \sin \varphi G_s^\delta] \sec \varphi dl \\
 & - Kr F_s^\delta d\mu \\
 & + [\sin E F_c^\delta - \cos \varphi G_s^\delta] d\varphi \\
 & + \left[-F_c^\delta \frac{r}{a} \tan g \frac{i}{2} + H_s^\delta \sin g - H_c^\delta \cos g \right] \sin i d\theta \\
 & + F_c^\delta \frac{r}{a} d(g + \theta) \\
 & + [H_s^\delta \cos g + H_c^\delta \sin g] di.
 \end{aligned}$$

De ces formules nous passerons à celles qui contiennent dU_0 , dx_0 , $d\beta_0$, de_0 , di_0 et $d\delta_0$ par l'intermédiaire des éléments canoniques que nous avons introduits.

Rappelons les relations entre ces éléments et les éléments elliptiques :

$$\begin{aligned}
 L &= \sqrt{a}, \\
 G &= L \sqrt{1 - e^2} = L \cos \varphi = \sqrt{a} \cos \varphi, \\
 \Theta &= G \cos i = L \cos \varphi \cos i = \sqrt{a} \cos \varphi \cos i, \\
 U &= L + S + T, \\
 S &= L - G, \quad T = G - \Theta, \\
 \lambda &= l + g + \theta - t, \quad s = -l - 2g - 2\theta + 2t, \quad \tau = -l - g - 2\theta + 2t, \\
 x &= \sqrt{2S} \cos s, \quad \xi = \sqrt{2T} \cos \tau, \\
 y &= \sqrt{2S} \sin s, \quad \eta = \sqrt{2T} \sin \tau.
 \end{aligned}$$

Les expressions de λ , s et τ donnent

$$dl = 2 d\lambda + ds, \quad d\theta = -d\lambda - d\tau, \quad d(g + \theta) = -d\lambda - ds,$$

et comme

$$ds = \frac{-y dx + x dy}{2S}, \quad d\tau = \frac{-\eta d\xi + \xi d\eta}{2T},$$

nous obtiendrons

$$dl = 2 d\lambda + \frac{x dy - y dx}{2S},$$

$$d\theta = - d\lambda - \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{2T},$$

$$d(\theta + g) = - d\lambda - \frac{x dy - y dx}{2S}.$$

De même les relations

$$L = U - S - T,$$

$$\frac{S}{L} = 1 - \frac{G}{L} = 1 - \cos \varphi,$$

$$\frac{T}{G} = 1 - \frac{\Theta}{G} = 1 - \cos i,$$

$$\mu = \frac{1}{L^3}$$

donnent

$$dL = dU - dS - dT, \quad d\mu = - \frac{3}{L^4} [dU - dS - dT],$$

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{-S dU + S dT + (U - T) dS}{L^2},$$

$$\sin i di = \frac{-T dU + 2T dS + (G + T) dT}{G^2}.$$

Or

$$dS = x dx + y dy,$$

$$dT = \xi d\xi + \eta d\eta.$$

En remplaçant, dans les équations précédentes, dS et dT par ces valeurs, nous aurons

$$d\mu = + \frac{3}{L^4} [-dU + x dx + y dy + \xi d\xi + \eta d\eta],$$

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{1}{L^2} [-S dU + (U - T)(x dx + y dy) + S(\xi d\xi + \eta d\eta)],$$

$$\sin i di = \frac{1}{G^2} [-T dU + 2T(x dx + y dy) + (G + T)(\xi d\xi + \eta d\eta)].$$

En remplaçant dans les équations de la page précédente dl , $d\theta$, $d(\theta + g)$, $d\mu$, $d\varphi$ et di par leurs expressions en fonction de dU , dx , dy , ..., nous aurons les variations $d\mathbb{R}$ et $d\mathbb{Q}$ exprimées en fonction

des variations des éléments canoniques :

$$\begin{aligned}
 \cos \Theta \, dR &= (2A^I - A^0 - A^{g+0}) \, d\lambda \\
 &- \frac{1}{L^2} \left[\frac{3A^\mu}{L^2} + \frac{A^\varphi S}{\sin \varphi} + \frac{A^i T}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] dU \\
 &+ \left\{ \frac{x}{L^2} \left[\frac{3A^\mu}{L^2} + \frac{A^\varphi (U - T)}{\sin \varphi} + \frac{2A^i T}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] + \frac{y}{2S} (-A^I + A^{g+0}) \right\} dx \\
 &+ \left\{ \frac{y}{L^2} \left[\frac{3A^\mu}{L^2} + \frac{A^\varphi (U - T)}{\sin \varphi} + \frac{2A^i T}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] + \frac{x}{2S} (+A^I - A^{g+0}) \right\} dy \\
 &+ \left\{ \frac{\zeta}{L^2} \left[\frac{3A^\mu}{L^2} + \frac{A^\varphi S}{\sin \varphi} + \frac{A^i (G + T)}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] + \frac{\eta}{2T} A^0 \right\} d\zeta \\
 &+ \left\{ \frac{\eta}{L^2} \left[\frac{3A^\mu}{L^2} + \frac{A^\varphi S}{\sin \varphi} + \frac{A^i (G + T)}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] - \frac{\zeta}{2T} A^0 \right\} d\eta, \\
 \\
 d\Theta &= + (2D^I - D^0 - D^{g+0}) \, d\lambda \\
 &- \frac{1}{L^2} \left[\frac{3D^\mu}{L^2} + \frac{D^\varphi S}{\sin \varphi} + \frac{D^i T}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] dU \\
 &+ \left\{ \frac{x}{L^2} \left[\frac{3D^\mu}{L^2} + \frac{D^\varphi (U - T)}{\sin \varphi} + \frac{2D^i T}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] + \frac{y}{2S} (-D^I + D^{g+0}) \right\} dx \\
 &+ \left\{ \frac{y}{L^2} \left[\frac{3D^\mu}{L^2} + \frac{D^\varphi (U - T)}{\sin \varphi} + \frac{2D^i T}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] + \frac{x}{2S} (+D^I - D^{g+0}) \right\} dy \\
 &+ \left\{ \frac{\zeta}{L^2} \left[\frac{3D^\mu}{L^2} + \frac{D^\varphi S}{\sin \varphi} + \frac{D^i (G + T)}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] + \frac{D^0 \eta}{2T} \right\} d\zeta \\
 &+ \left\{ \frac{\eta}{L^2} \left[\frac{3D^\mu}{L^2} + \frac{D^\varphi S}{\sin \varphi} + \frac{D^i (G + T)}{\sin i \cos^2 \varphi} \right] - \frac{D^0 \zeta}{2T} \right\} d\eta,
 \end{aligned}$$

$x, y, \dots, L, T, S$ sont des quantités qu'on est obligé de calculer pour les éphémérides. Les valeurs de $A^I, A^0, \dots, D^I, D^0, \dots$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 A^I &= [F_c^\alpha + \sin \varphi G_c^\alpha] \sec \varphi, \\
 A^\mu &= -K F_s^\alpha, \\
 A^\varphi &= \sin E F_c^\alpha - \cos \varphi G_s^\alpha, \\
 A^0 &= \left[-F_c^\alpha \frac{r}{a} \tan \frac{i}{2} + H_s^\alpha \sin g - H_c^\alpha \cos g \right] \sin i, \\
 A^{g+0} &= F_c^\alpha \frac{r}{a}, \\
 A^i &= H_s^\alpha \cos g + H_c^\alpha \sin g; \\
 D^I &= [F_c^{\hat{\alpha}} + \sin \varphi G_c^{\hat{\alpha}}] \sec \varphi, \\
 D^\mu &= -K F_s^{\hat{\alpha}}, \\
 D^\varphi &= \sin E F_c^{\hat{\alpha}} - \cos \varphi G_s^{\hat{\alpha}}
 \end{aligned}$$

et

$$D^0 = \left[-F_c^{\delta} \frac{r}{a} \tan g \frac{i}{2} + H_s^{\delta} \sin g - H_c^{\delta} \cos g \right] \sin i,$$

$$D^{0+g} = F_c^{\delta} \frac{r}{\alpha},$$

$$D^i = H_s^{\delta} \cos g + H_c^{\delta} \sin g.$$

Ces formules donnent les accroissements de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ comme fonctions linéaires des accroissements des éléments $U, x, y, \dots, \lambda$ dont nous avons trouvé les valeurs en fonction des six constantes d'intégration $U_0, \alpha_0, \beta_0, e_0, i_0$ et δ_0 et du temps. Une simple différentiation par rapport aux constantes d'intégration nous fera connaître les variations de U, x, y, ξ, η et λ en fonction linéaire de $dU_0, d\alpha_0, d\beta_0, de_0, di_0$ et $d\delta_0$. Après leur substitution dans les formules ci-dessus nous aurons les variations de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ exprimées comme des fonctions linéaires de $dU_0, d\alpha_0, d\beta_0, de_0, di_0$ et $d\delta_0$.

CHAPITRE III.

Recherches numériques.

Nous allons exposer les essais que nous avons faits pour déterminer les valeurs numériques des constantes d'intégration qui rentrent dans nos formules. Dans ces calculs, nous avons adopté les éléments de Jupiter donnés par Le Verrier et que nous reproduisons d'après la *Connaissance des Temps* :

Époque et équinoxe. (t. m. de Paris.)	Longitude moyenne de l'époque.	Anomalie moyenne de l'époque.
1850 janv. 1,0	160° 1' 10",3	148° 6' 11",9
	Longitude	
Longitude du périhélie.	du nœud ascendant.	Inclinaison.
11° 54' 58",4	98° 56' 17",0	1° 18' 41",4
	Moyen	Logarithme
φ (sin φ = excentricité).	mouvement diurne.	du demi-grand axe.
2° 45' 56",5	299",1284	0,7162167
P.		6

Nous avons adopté pour la masse de Jupiter $m = \frac{1}{1047,232}$, nombre considéré par Tisserand comme le plus probable ⁽¹⁾.

Nous reproduisons aussi les lieux normaux d'Illécube calculés par M. Simonin et dont nous avons fait usage dans notre travail :

Temps moyen de Paris.	R app.	(D) app.	Nombre d'observations.
	^h ^m ^s	[°] ['] ^{''}	
1869 avril 10,26755.....	12. 0.35,15	— 1.58.30,4	14
1871 sept. 15,22166.....	22.30.44,79	— 10.44. 4,0	6
1874 janv. 16,96500.....	7.42.38,26	+26.59.22,7	13
1875 avril 23,33985.....	13.35. 0,55	— 14.13.50,4	18
1876 juill. 14,44461.....	19.27.47,70	— 27.33.36,2	2 et 1
1877 sept. 12,94067.....	23.35.23,63	— 2.37.46,8	6
1881 mai 24,93888.....	14.59.40,26	— 23. 1.43,5	6
1886 fév. 24,24045.....	10.54.39,06	+ 8 32.32,6	8 et 7
1887 juin 13,45095....	16.34.57,18	— 28.28.27,0	1
1889 oct. 15,31248.....	1.19.59,62	+11.48.51,6	1
1892 mars 24,92796.....	12.20.21,33	— 3.55. 6,0	10
1894 août 30,17338....	22.40.25,65	— 10. 5. 0,9	5
1895 nov. 8,17282.....	2.13.31,89	+18.15.41,7	9
1898 avril 26,60067.....	13.44. 8,39	— 15.20.13,7	10
1899 juill. 5,91551.....	19.39.38,74	— 27. 9.26,9	4
1901 nov. 23,14058.....	3.24.32,18	+24.29.10,1	4

Choix des unités. — Tout d'abord, il nous a fallu choisir les unités de manière que le moyen mouvement de Jupiter et la constante de l'attraction soient égaux à 1. Désignons par $\frac{1}{x}$ le rapport de l'unité de longueur choisie à l'unité communément employée et par $\frac{1}{y}$ le rapport de l'unité de temps choisie au jour solaire moyen. Pour déterminer x et y nous aurons les équations

$$y = n' \quad \text{et} \quad \frac{x^3}{y^2} = \frac{1}{f},$$

puisque

$$f = \frac{4\pi^2 a'^3}{(1+m)T'^2} \quad \text{et} \quad n' = \frac{2\pi}{T'},$$

m , n' , a' et T' désignant respectivement la masse, le moyen mouvement, le demi grand-axe et la durée de révolution de Jupiter.

⁽¹⁾ *Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1889, p. 682.

En adoptant pour n' la valeur de Le Verrier, ces équations donnent : $\log y = \bar{3},161433$ et $\log x = \bar{1},283901$, c'est-à-dire que, pour passer des unités communément employées aux unités choisies, il faut augmenter le logarithme du temps de $\bar{3},161433$ et les logarithmes des longueurs de $\bar{1},283901$.

Choix de l'époque et des constantes d'intégration. — Nous avons adopté pour l'époque la date 1897 sept. 23,5 t. m. de Paris. C'est le moment d'une conjonction presque symétrique d'Hécube avec Jupiter. En effet, à ce moment, Hécube est tout près de son périhélie et Jupiter à 21° de son aphélie.

Dans le choix des constantes d'intégration, on se heurte à la difficulté suivante : Pour pouvoir calculer des valeurs approchées de e_0 , i_0 , α_0 , β_0 et δ_0 , il faut se fixer un certain moyen mouvement diurne. Or, l'expression de ce mouvement ($\lambda_0 - 1$) contient des termes qui sont des fonctions de e_0 et i_0 et qui peuvent dépasser une dizaine de secondes. Par conséquent, la valeur de $\lambda_0 - 1$ ne peut pas donner U_0 avec une approximation suffisante sans que l'on connaisse e_0 et i_0 .

Les formules de M. Simonin représentant assez bien le mouvement d'Hécube, nous avons songé tout d'abord à adopter ses éléments et à chercher des valeurs numériques de U_0 , e_0 , ... qui définissent pour $t = 0$ des éléments elliptiques identiques aux siens pour le même instant. Nous avons calculé des valeurs approchées de ces constantes en posant

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2S} \cos s = x_0 + e_0 \cos \alpha_0, & \xi &= \sqrt{2T} \cos \tau = i_0 \cos \beta_0, \\ y &= \sqrt{2S} \sin s = -e_0 \sin \alpha_0, & \eta &= \sqrt{2T} \sin \tau = -i_0 \sin \beta_0, \\ U_0 &= L(2 - \sqrt{1 - e^2} \cos i) = \text{const.}, & \lambda &= \delta_0, \end{aligned}$$

Les perturbations dans le cas d'Hécube étant très grandes, les éléments calculés avec les constantes d'intégration ainsi obtenues différaient beaucoup des éléments qui nous ont servi dans le calcul. L'identification définitive était obtenue par des formules différentielles en tenant compte des perturbations. Avec les constantes ainsi corrigées, nous avons calculé les éléments elliptiques du mouvement pour les oppositions de 1869, 1877, 1887, 1901 et l'époque $t = 0$ (1897,

sept. 23,5). La comparaison avec les éléments calculés pour les mêmes dates, à l'aide des formules de M. Simonin, nous a montré que nous avons presque les mêmes mouvements du périhélie et des autres éléments, mais qu'il faut changer considérablement le moyen mouvement diurne. En effet, nous avons obtenu pour lesdites oppositions les différences de longitude moyenne suivantes :

Simonin-Popoff, $-4^{\circ}8'7''$, $-3^{\circ}12'13''$, $-1^{\circ}43'58''$, 0° , $+0^{\circ}34'19''$.

Nous avons cherché ensuite les valeurs des constantes d'intégration qui rendent minima ces différences et qui donnent pour $t = 0$ les éléments de M. Simonin du même instant.

Nous avons déjà vu que le choix de U_0 influe d'une manière très sensible sur celui de e_0 et i_0 et qu'en faisant varier e_0 et i_0 on obtient des moyens mouvements de quelques secondes de différence. De plus, les termes à très longue période, que nous avons négligés dans la première approximation, changent sensiblement les constantes α_0 , β_0 et δ_0 . Tout cela rendait l'identification très difficile.

Pour faciliter les calculs, nous avons fixé les limites entre lesquelles U_0 peut être compris. Avec ces valeurs de U_0 , nous avons calculé les coefficients de nos formules et leurs dérivées premières, secondes et troisièmes, ce qui nous permettait d'obtenir par des séries, avec une grande précision, les valeurs des coefficients pour des valeurs intermédiaires de U_0 .

Calcul des coefficients. — Dans ces calculs nous avons adopté, comme nous l'avons dit, les éléments de Jupiter donnés par Le Verrier. Le demi-grand axe de Jupiter exprimé avec les unités adoptées dans ce travail est

$$a' = [0,000135].$$

A cette valeur de a' et aux valeurs limites $[1,899000]$ et $[1,898212]$ de U_0 correspondent les valeurs $[1,797862]$ et $[1,796289]$ de $\alpha = \frac{U_0^2}{a'}$.

Les nombres de Laplace $b^{(0)}$ et $b^{(1)}$ sont donnés par les formules

$$b^{(0)} = \frac{4}{\pi} F_1 \quad \text{et} \quad b^{(1)} = \frac{4}{\pi} \frac{F_1 - E_1}{\alpha},$$

où F, et E, sont les intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce relatives au module α . Nous avons calculé ces intégrales en nous servant des tables de Legendre données dans son *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (t. II, Table I, p. 221). Pour avoir une vérification, nous avons recalculé les mêmes nombres par séries en partant des valeurs calculées par M. Simonin pour $\alpha[1,791884]$ par les moyennes arithmético-géométriques. Dans le Tableau suivant, nous reproduisons les logarithmes de $b^{(0)}$, ... pour la valeur $[1,898212]$ de U_0 qui diffère très peu de la valeur définitivement adoptée :

$b^{(0)} [0,353270]$	$b^{(1)} [1,874595]$	$b^{(2)} [1,555055]$	
$\frac{db^{(0)}}{d\alpha} [0,036438]$	$\frac{db^{(1)}}{d\alpha} [0,240149]$	$\frac{db^{(2)}}{d\alpha} [0,157849]$	
$\frac{d^2 b^{(0)}}{d\alpha^2} [0,623587]$	$\frac{d^2 b^{(1)}}{d\alpha^2} [0,595505]$	$\frac{d^2 b^{(2)}}{d\alpha^2} [0,691637]$	
$\frac{d^3 b^{(0)}}{d\alpha^3} [1,347824]$	$\frac{d^3 b^{(1)}}{d\alpha^3} [1,361928]$	$\frac{d^3 b^{(2)}}{d\alpha^3} [1,366870]$	
$\frac{d^4 b^{(0)}}{d\alpha^4} [2,266273]$	$\frac{d^4 b^{(1)}}{d\alpha^4} [2,266615]$	$\frac{d^4 b^{(2)}}{d\alpha^4} [2,276996]$	
$b^{(3)} [1,276879]$	$b^{(4)} [1,018044]$	$b^{(5)} [2,770423]$	
$\frac{db^{(3)}}{d\alpha} [0,029167]$	$\frac{db^{(4)}}{d\alpha} [1,880385]$	$\frac{db^{(5)}}{d\alpha} [1,720240]$	
$\frac{d^2 b^{(3)}}{d\alpha^2} [0,711839]$	$\frac{d^2 b^{(4)}}{d\alpha^2} [0,679437]$	$\frac{d^2 b^{(5)}}{d\alpha^2} [0,613015]$	
$\frac{d^3 b^{(3)}}{d\alpha^3} [1,418344]$	$\frac{d^3 b^{(4)}}{d\alpha^3} [1,460069]$	$\frac{d^3 b^{(5)}}{d\alpha^3} [1,473162]$	
$\frac{d^4 b^{(3)}}{d\alpha^4} [2,288741]$	$\frac{d^4 b^{(4)}}{d\alpha^4} [2,320319]$	$\frac{d^4 b^{(5)}}{d\alpha^4} [2,358706]$	
$c^{(0)} [0,773910]$	$c^{(1)} [0,681655]$	$c^{(2)} [0,549803]$	$c^{(3)} [0,399561]$
$\frac{dc^{(0)}}{d\alpha} [1,418559]$	$\frac{dc^{(1)}}{d\alpha} [1,423986]$	$\frac{dc^{(2)}}{d\alpha} [1,388929]$	$\frac{dc^{(3)}}{d\alpha} [1,322583]$
$\frac{d^2 c^{(0)}}{d\alpha^2} [2,317290]$	$\frac{d^2 c^{(1)}}{d\alpha^2} [2,310901]$	$\frac{d^2 c^{(2)}}{d\alpha^2} [2,302249]$	$\frac{d^2 c^{(3)}}{d\alpha^2} [2,280649]$

On en déduit les valeurs des $A_i^{(k)}$ et des $B_i^{(k)}$, qui sont donnés dans le

Tableau suivant par leurs logarithmes :

$\Lambda^{(0)} [0, 353\,135]$	$\Lambda^{(1)} [\bar{1}, 874\,460]$	$\Lambda^{(2)} [\bar{1}, 554\,920]$	
$\Lambda_1^{(0)} [\bar{1}, 832\,592]$	$\Lambda_1^{(1)} [0, 036\,303]$	$\Lambda_1^{(2)} [\bar{1}, 954\,003]$	
$\Lambda_2^{(0)} [\bar{1}, 915\,000]$	$\Lambda_2^{(1)} [\bar{1}, 886\,918]$	$\Lambda_2^{(2)} [\bar{1}, 983\,050]$	
$\Lambda_3^{(0)} [\bar{1}, 958\,405]$	$\Lambda_3^{(1)} [\bar{1}, 972\,509]$	$\Lambda_3^{(2)} [\bar{1}, 977\,451]$	
$\Lambda_4^{(0)} [0, 071\,083]$	$\Lambda_4^{(1)} [0, 071\,425]$	$\Lambda_4^{(2)} [0, 081\,806]$	
$\Lambda^{(3)} [\bar{1}, 276\,744]$	$\Lambda^{(4)} [\bar{1}, 017\,909]$	$\Lambda^{(5)} [\bar{2}, 770\,288]$	
$\Lambda_1^{(3)} [\bar{1}, 825\,321]$	$\Lambda_1^{(4)} [\bar{1}, 676\,539]$	$\Lambda_1^{(5)} [\bar{1}, 516\,394]$	
$\Lambda_2^{(3)} [0, 003\,252]$	$\Lambda_2^{(4)} [\bar{1}, 970\,850]$	$\Lambda_2^{(5)} [\bar{1}, 904\,428]$	
$\Lambda_3^{(3)} [0, 028\,925]$	$\Lambda_3^{(4)} [0, 070\,650]$	$\Lambda_3^{(5)} [0, 083\,743]$	
$\Lambda_4^{(3)} [0, 093\,551]$	$\Lambda_4^{(4)} [0, 125\,129]$	$\Lambda_4^{(5)} [0, 163\,516]$	
$B^{(0)} [0, 570\,064]$	$B^{(1)} [0, 477\,809]$	$B^{(2)} [0, 345\,957]$	$B^{(3)} [0, 195\,715]$
$B_1^{(0)} [1, 145\,273]$	$B_1^{(1)} [1, 126\,790]$	$B_1^{(2)} [1, 071\,813]$	$B_1^{(3)} [0, 990\,882]$
$B_2^{(0)} [1, 552\,252]$	$B_2^{(1)} [1, 549\,295]$	$B_2^{(2)} [1, 533\,066]$	$B_2^{(3)} [1, 499\,363]$

Les coefficients $M_1, M_2, \dots$ et leurs dérivées premières et secondes par rapport à U ont les valeurs

$M_0 [0,353135]$	$M'_0 [0,235410]$	$M''_0 [1,103298]$	$M'''_0 [2,107109]$
$M_1 [0,368273]_n$	$M'_1 [1,210418]_n$	$M''_1 [2,116278]_n$	
$M_2 [1,920378]$	$M'_2 [0,932848]$	$M''_2 [1,982707]$	
$M_3 [1,117371]$	$M'_3 [2,212531]$	$M''_3 [3,323817]$	
$M_4 [0,345954]_n$	$M'_4 [1,474627]_n$	$M''_4 [2,675731]_n$	
$M_5 [1,286050]_n$	$M'_5 [2,284253]_n$	$M''_5 [3,321965]_n$	
$M_6 [1,449525]$	$M'_6 [2,323180]$	$M''_6 [3,288406]$	
$M_7 [0,195715]$	$M'_7 [1,393700]$	$M''_7 [2,638458]$	
$M_8 [0,176777]$	$M'_8 [1,228575]$	$M''_8 [2,394143]$	

Enfin, nous donnons les logarithmes des quantités $A_1, B_1, C_1, \dots$ et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à U :

$A_1 [\bar{3},032062]$	$A'_1 [\bar{4},914337]$	$A''_1 [\bar{3},782225]$
$B_1 [\bar{3},098094]_n$	$B'_1 [\bar{3},898846]_n$	$B''_1 [\bar{2},782814]_n$
$C_1 [\bar{3},305346]$	$C'_1 [\bar{2},373311]$	$C''_1 [\bar{1},469664]$
$D_1 [\bar{3},286502]_n$	$D'_1 [\bar{2},314041]_n$	$D''_1 [\bar{1},360496]_n$
$E_1 [\bar{4},797322]_n$	$E'_1 [\bar{3},615637]_n$	$E''_1 [\bar{2},567348]_n$

et

$H_1[\bar{3}, 041656]_n$	$H'_1[\bar{2}, 041372]_n$	$H''_1[\bar{1}, 178446]_n$
$K_1[\bar{4}, 599305]$	$K'_1[\bar{3}, 611775]$	$K''_1[\bar{2}, 661634]$
$L_1[\bar{3}, 762034]_n$	$L'_1[\bar{2}, 748178]_n$	$L''_1[\bar{1}, 793828]_n$
$M_1[\bar{3}, 661887]_n$	$M'_1[\bar{2}, 610012]_n$	$M''_1[\bar{1}, 587089]_n$
$P_1[\bar{4}, 554674]$	$P'_1[\bar{3}, 606472]$	$P''_1[\bar{2}, 772040]$
$Q_1[\bar{3}, 526392]$	$Q'_1[\bar{2}, 400047]$	$Q''_1[\bar{1}, 365273]$

De même, nous reproduisons les logarithmes des nombres $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, ... $A^{(0)}$ $A^{(1)}$... et des coefficients A_1 , B_1 , ... correspondant $U_0 = [\bar{1}, 899000]$:

$b^{(0)}[0, 353747]$	$b^{(1)}[\bar{1}, 876886]$	$b^{(2)}[\bar{1}, 559014]$	
$\frac{db^{(0)}}{d\alpha}[0, 040250]$	$\frac{db^{(1)}}{d\alpha}[0, 242388]$	$\frac{db^{(2)}}{d\alpha}[0, 161216]$	
$\frac{d^2b^{(0)}}{d\alpha^2}[0, 628827]$	$\frac{d^2b^{(1)}}{d\alpha^2}[0, 601277]$	$\frac{d^2b^{(2)}}{d\alpha^2}[0, 696330]$	
$\frac{d^3b^{(0)}}{d\alpha^3}[1, 356014]$	$\frac{d^3b^{(1)}}{d\alpha^3}[1, 369862]$	$\frac{d^3b^{(2)}}{d\alpha^3}[1, 374891]$	
$\frac{d^4b^{(0)}}{d\alpha^4}[2, 276928]$	$\frac{d^4b^{(1)}}{d\alpha^4}[2, 277314]$	$\frac{d^4b^{(2)}}{d\alpha^4}[2, 287557]$	
$b^{(3)}[\bar{1}, 282477]$	$b^{(4)}[\bar{1}, 025289]$	$b^{(5)}[\bar{2}, 779373]$	
$\frac{db^{(3)}}{d\alpha}[0, 033898]$	$\frac{db^{(4)}}{d\alpha}[\bar{1}, 886540]$	$\frac{db^{(5)}}{d\alpha}[\bar{1}, 727804]$	
$\frac{d^2b^{(3)}}{d\alpha^2}[0, 716888]$	$\frac{d^2b^{(4)}}{d\alpha^2}[0, 685458]$	$\frac{d^2b^{(5)}}{d\alpha^2}[0, 620316]$	
$\frac{d^3b^{(3)}}{d\alpha^3}[1, 425649]$	$\frac{d^3b^{(4)}}{d\alpha^3}[1, 467132]$	$\frac{d^3b^{(5)}}{d\alpha^3}[1, 480533]$	
$\frac{d^4b^{(3)}}{d\alpha^4}[2, 299267]$	$\frac{d^4b^{(4)}}{d\alpha^4}[2, 330515]$	$\frac{d^4b^{(5)}}{d\alpha^4}[2, 368727]$	
$c^{(0)}[0, 778274]$	$c^{(1)}[0, 687111]$	$c^{(2)}[0, 556611]$	$c^{(3)}[0, 407806]$
$\frac{dc^{(0)}}{d\alpha}[1, 426384]$	$\frac{dc^{(1)}}{d\alpha}[1, 431604]$	$\frac{dc^{(2)}}{d\alpha}[1, 397021]$	$\frac{dc^{(3)}}{d\alpha}[1, 331551]$
$\frac{d^2c^{(0)}}{d\alpha^2}[2, 327641]$	$\frac{d^2c^{(1)}}{d\alpha^2}[2, 321372]$	$\frac{d^2c^{(2)}}{d\alpha^2}[2, 312764]$	$\frac{d^2c^{(3)}}{d\alpha^2}[2, 291447]$

et

$A^{(0)}[0,353609]$	$A^{(1)}[\bar{1},876748]$	$A^{(2)}[\bar{1},558876]$	
$A_1^{(0)}[\bar{1},837974]$	$A_1^{(1)}[0,040112]$	$A_1^{(2)}[\bar{1},958940]$	
$A_2^{(0)}[\bar{1},923383]$	$A_2^{(1)}[\bar{1},895833]$	$A_2^{(2)}[\bar{1},990886]$	
$A_3^{(0)}[\bar{1},971311]$	$A_3^{(1)}[\bar{1},985159]$	$A_3^{(2)}[\bar{1},990188]$	
$A_4^{(0)}[0,088027]$	$A_4^{(1)}[0,088413]$	$A_4^{(2)}[0,098656]$	
$A^{(3)}[\bar{1},282339]$	$A^{(4)}[\bar{1},025151]$	$A^{(5)}[\bar{2},779235]$	
$A_1^{(3)}[\bar{1},831622]$	$A_1^{(4)}[\bar{1},684264]$	$A_1^{(5)}[\bar{1},525528]$	
$A_2^{(3)}[0,011444]$	$A_2^{(4)}[\bar{1},980014]$	$A_2^{(5)}[\bar{1},914872]$	
$A_3^{(3)}[0,040946]$	$A_3^{(4)}[0,082429]$	$A_3^{(5)}[0,095830]$	
$A_4^{(3)}[0,110366]$	$A_4^{(4)}[0,141614]$	$A_4^{(5)}[0,179826]$	
$B^{(0)}[0,575998]$	$B^{(1)}[0,484835]$	$B^{(2)}[0,354335]$	$B^{(3)}[0,205530]$
$B_1^{(0)}[1,154908]$	$B_1^{(1)}[1,136716]$	$B_1^{(2)}[1,082512]$	$B_1^{(3)}[1,002627]$
$B_2^{(0)}[1,566144]$	$B_2^{(1)}[1,563188]$	$B_2^{(2)}[1,547179]$	$B_2^{(3)}[1,513993]$
$A_1[\bar{3},032536]$	$A'_1[\bar{4},918931]$	$A''_1[\bar{3},788519]$	
$B_1[\bar{3},102035]_{(n)}$	$B'_1[\bar{3},903619]_{(n)}$	$B''_1[\bar{2},790180]_{(n)}$	
$C_1[\bar{3},312638]$	$C'_1[\bar{2},381089]$	$C''_1[\bar{1},479157]$	
$D_1[\bar{3},293145]_{(n)}$	$D'_1[\bar{2},320969]_{(n)}$	$D''_1[\bar{1},368626]_{(n)}$	
$E_1[\bar{4},801427]_{(n)}$	$E'_1[\bar{3},621220]_{(n)}$	$E''_1[\bar{2},575920]_{(n)}$	
$H_1[\bar{3},047885]_{(n)}$	$H'_1[\bar{2},049931]_{(n)}$	$H''_1[\bar{1},189943]_{(n)}$	
$K_1[\bar{4},605719]$	$K'_1[\bar{3},618763]$	$K''_1[\bar{2},670248]$	
$L_1[\bar{3},768073]_{(n)}$	$L'_1[\bar{2},755105]_{(n)}$	$L''_1[\bar{1},803081]_{(n)}$	
$M_1[\bar{3},667420]_{(n)}$	$M'_1[\bar{2},615919]_{(n)}$	$M''_1[\bar{1},594589]_{(n)}$	
$P_1[\bar{4},561702]$	$P'_1[\bar{3},615613]$	$P''_1[\bar{2},784020]$	
$Q_1[\bar{3},531054]$	$Q'_1[\bar{2},405806]$	$Q''_1[\bar{1},373884]$	

Ces valeurs de $A''_1, B''_1, \dots$ et celles qui correspondent à $U_0 = [\bar{1},898212]$ nous ont permis de calculer les valeurs approchées des dérivées troisièmes suivantes :

$$\begin{aligned}
 &A'''_1[\bar{2},789], \quad B'''_1[\bar{1},858]_{(n)}, \quad C'''_1[0,657], \quad D'''_1[0,180]_{(n)}, \\
 &E'''_1[\bar{1},710]_{(n)}, \quad H'''_1[0,450]_{(n)}, \quad K'''_1[\bar{1},806], \quad L'''_1[0,970]_{(n)}, \\
 &M'''_1[0,671]_{(n)}, \quad P'''_1[0,061], \quad Q'''_1[0,510].
 \end{aligned}$$

Ayant calculé $A_1, B_1, \dots$ et leurs dérivées premières, secondes et troisièmes, la série de Taylor nous a donné avec toute la précision

désirée les valeurs de ces quantités et de leurs dérivées premières, pour les valeurs U , des approximations successives que nous avons calculées dans le cours de ce travail. Dans la plupart des cas, les valeurs de U_0 étant très proches de $[1,898212]$, le troisième terme de la série n'affectait pas la sixième décimale des logarithmes des quantités cherchées.

Approximations successives. — Avant d'exposer les résultats de nos recherches numériques, nous ferons remarquer que les coefficients de t dans les termes séculaires de λ , α et β aussi bien que les petits diviseurs ν_1 , α_1 et β_1 dépendent des constantes d'intégration U_0 , e_0 , i_0 , et que les petites variations de ces constantes font changer ces coefficients et diviseurs de quantités qui ne sont pas très petites par rapport à eux. D'autre part, les coefficients des sinus et des cosinus, grands à cause de ces diviseurs, changent beaucoup par les petits changements des constantes d'intégration et entraînent des changements considérables des constantes α_0 , β_0 et δ_0 . Par exemple, pour obtenir de petits changements des éléments du mouvement, nous avons dû quelquefois changer α_0 de quelques degrés. Cela exige que l'on calcule avec une grande précision les coefficients des formules différentielles et que l'on tienne compte des carrés des variations de α_0 , δ_0 et β_0 , ce qui rend illusoire l'application de la méthode des moindres carrés.

Dans notre cas, les difficultés augmentaient encore du fait que nous étions souvent obligé, dans le cours de ce travail, de changer les formules en considérant de nouveaux termes, ce qui entraînait des changements plus considérables des constantes d'intégration. C'est pour cela que nous avons renoncé dès le début à l'application de la méthode des moindres carrés, et, au lieu de chercher les changements des constantes d'intégration, nous avons cherché les changements des éléments elliptiques du mouvement en nous servant des Tables de M. Bauschinger, après quoi nous avons calculé la valeur des constantes qui donnent les éléments cherchés. Les variations des constantes d'intégration ne faisaient que déplacer parallèlement les courbes des éléments du mouvement sans trop changer les courbes mêmes. Pour tenir compte de ces changements, nous avons calculé dans chaque approximation les éléments du mouvement pour l'époque ($t = 0$) et pour les oppositions de 1869, 1887 et 1901, après quoi nous avons recalculé les

valeurs nouvelles des constantes employées dans les calculs des éphémérides. Pour contrôle, nous avons calculé aussi les coefficients des formules différentielles en nous servant des résultats obtenus dans les approximations successives. Dans toutes ces approximations, nous nous sommes attaché à réduire les résidus. Le chemin que nous avons suivi ne nous a jamais donné de résidus plus grands que les résidus des approximations précédentes.

Nos premiers essais nous ont conduit aux valeurs suivantes des constantes d'intégration :

$$\begin{aligned} U_0 &= [\bar{1}, 898091], & e_0 &= [\bar{2}, 745690], & i_0 &= [\bar{2}, 882886]; \\ \delta_0 &= 1^\circ 41' 7'', & \alpha_0 &= -20^\circ 41' 25'', & \beta_0 &= 169^\circ 18' 21''. \end{aligned}$$

A ces constantes correspondaient, pour les seize oppositions considérées, des différences (O — C) entre les observations et le calcul comprises entre $+2^m 17^s$ et $-1^m 19^s$.

Un nouveau calcul de $U_0, e_0, \dots$ nous a donné

$$\begin{aligned} U_0 &= [\bar{1}, 898032], & e_0 &= [\bar{2}, 738948], & i_0 &= [\bar{2}, 882856]; \\ \delta_0 &= 2^\circ 4' 24'', & \alpha_0 &= -24^\circ 8' 15'', & \beta_0 &= 170^\circ 42' 5''. \end{aligned}$$

Avec ces valeurs des constantes, nous avons trouvé les résultats suivants :

Opposition.	Longitude du périhélie.	Anomalie moyenne.	Excentricité.	(O — C).
1869.....	$173^{\circ} 51' 18''$	$10.55.7''$	$5.50.15''$	$+1.12^m$
1871.....	$173.10.27$	$163.50.3$	$5.52.35$	-0.20
1874.....	$172.28.40$	$311.0.32$	$5.54.40$	$+0.15$
1875.....	$172.9.9$	$30.26.36$	$5.55.35$	-1.50
1876.....	$171.48.35$	$107.35.11$	$5.56.25$	-1.16
1877.....	$171.31.30$	$180.49.49$	$5.57.5$	-0.6
1881.....	$170.36.13$	$53.10.20$	$5.58.30$	-1.55
1886.....	$169.33.20$	$351.54.10$	$6.0.5$	-1.44
1887.....	$169.17.25$	$73.28.25$	$6.0.15$	-1.17
1889.....	$168.50.4$	$220.30.16$	$6.0.20$	$+0.21$
1892.....	$168.23.10$	$13.50.29$	$6.0.10$	-0.57
1894.....	$167.58.3$	$166.34.43$	$5.59.45$	-0.1
1895.....	$167.45.50$	$241.22.34$	$5.59.30$	-0.6
1898.....	$167.22.19$	$36.11.56$	$5.58.40$	$+0.35$
1899.....	$167.11.16$	$111.2.48$	$5.58.13$	$+0.45$
1901.....	$166.49.53$	$260.40.27$	$5.57.5$	-0.23

Dans ces calculs, nous n'avons pas tenu compte des perturbations à courte période et des termes qui contiennent le carré de la masse en facteur.

En présence des écarts si considérables, nous avons calculé, sur le conseil de M. Andoyer, les perturbations à courte période et nous avons repris les calculs en améliorant les constantes. Les nouveaux résidus étaient compris entre $+1^m25^s$ et -1^m9^s .

Ces résidus étant toujours considérables, nous avons essayé d'obtenir de meilleurs résultats en employant dans les calculs les expressions de ε^2 et ι^2 obtenues directement par l'intégration des équations du mouvement page 23, ce qui revient à considérer dans l'expression de ε et ι des termes qui contiennent le carré de la masse en facteur. Ces nouvelles formules nous ont donné pour

$$\begin{aligned} U_0 &= [\bar{1}, 898\,112], & e_0 &= [\bar{2}, 751\,995], & i_0 &= [\bar{2}, 882\,896], \\ \delta_0 &= +1^\circ 51' 36'', & \alpha_0 &= -21^\circ 56' 40'', & \beta_0 &= 170^\circ 32' 22'', \end{aligned}$$

des écarts entre les ascensions droites observées et calculées comprises entre -1^m08^s et $+0^m57^s$.

En présence de ces résultats, nous avons calculé les termes les plus importants qui contiennent le carré de la masse en facteur. Le nouveau calcul avec les nouvelles formules nous a donné pour les constantes les valeurs

$$\begin{aligned} U_0 &= [\bar{1}, 898\,370], & e_0 &= [\bar{2}, 761\,082], & i_0 &= [\bar{2}, 883\,025], \\ \delta_0 &= +2^\circ 9' 30'', & \alpha_0 &= -15^\circ 35' 13'', & \beta_0 &= 170^\circ 50' 15''. \end{aligned}$$

Nous reproduisons dans le Tableau suivant les résidus correspondants et les longitudes du périhélie, les anomalies moyennes, les angles excentriques aux instants des observations dont nous faisons usage :

Opposition.	Longitude du périhélie.	Anomalie moyenne.	Excentricité.	(O - C).
1869.....	173. 7'.50"	11.36'.49"	5.40'.20"	+42 ^s
1871.....	173. 7.55	163.45.13	5.46.25	+23
1874.....	173.10.38	310.16.15	5.47.45	-15
1875... ..	172.41. 2	29.48.50	5.51.45	-12
1876.....	171.39.36	107.36.36	5.53.25	+ 1

Opposition.	Longitude du périhélie.	Anomalie moyenne.	Excentricité.	(O — C)
1877.....	171. 8. 43 ⁰	181. 9. 9 ⁰	5. 51. 30 ⁰	+24 ^s
1881.....	170. 40. 27	53. 2. 29	5. 53. 30	—39
1886.....	170. 25. 55	351. 0. 0	6. 0. 37	—23
1887.....	169. 34. 29	73. 4. 33	6. 1. 40	—48
1889.....	169. 25. 31	219. 51. 40	5. 58. 5	—7
1892.....	168. 50. 25	13. 20. 13	5. 57. 45	+3
1894.....	168. 25. 29	166. 4. 11	5. 59. 50	—16
1895.....	168. 40. 44	240. 24. 35	6. 0. 20	—23
1898.....	167. 42. 19	35. 46. 44	6. 3. 43	+46
1899.....	167. 21. 1	110. 49. 33	6. 1. 20	+24
1901.....	167. 32. 17	259. 56. 3	5. 59. 7	—11

L'analyse de ces résultats et des termes de la fonction perturbatrice que nous avons négligés nous a fait reprendre nos premières formules et introduire dans l'expression de ε un terme empirique de coefficient $[3,58348]$ et d'argument φ et un autre de coefficient $[4,69898]$ et d'argument $2\varphi + \alpha$. Le calcul, d'après ces formules, nous a donné des résidus compris entre $+28^s$ et -21^s . Un nouveau calcul nous a donné des résidus compris entre $+19^s,7$ et $-20^s,6$.

Jusqu'ici, nous avons négligé dans l'expression de la longitude moyenne les termes à courte période que nous avons désignés par $\int \delta a dt$. Après avoir calculé ces termes, nous avons recalculé les constantes d'intégration et nous avons obtenu

$$\begin{aligned} U_0 &= [1,898339], & e_0 &= [2,737536], & i_0 &= [2,883010], \\ \delta_0 &= +1^{\circ}45'46'', & \alpha_0 &= -15^{\circ}16'29'', & \beta_0 &= 170^{\circ}23'48''. \end{aligned}$$

Ce sont ces constantes qui nous ont donné les meilleurs résultats que nous ayons obtenus et qui sont reproduits à la fin de ce Chapitre. Le plus grand écart entre les ascensions droites observées et calculées est ici de 18^s .

Nous reproduisons ci-après les expressions numériques de U , λ , ε , α , ... rapportées au plan de l'orbite de Jupiter de 1850,0. On passe des unités communément employées aux unités adoptées en augmentant le logarithme du temps de $3,161433$ et les logarithmes des longueurs

de $\bar{1},283901$. Le temps est compté à partir de 1897 sept. 23,5 t. m. de Paris et les longitudes à partir du point de l'orbite de Jupiter dont la longitude rapportée à l'équinoxe moyenne de 1850,0 est $168^{\circ}30'25'',7$. Les coefficients sont donnés par leurs logarithmes; ceux de λ , α et β sont exprimés en parties du rayon. Nous avons réuni et désigné par μ l'ensemble des termes à longue période $\int \delta a dt$ et les termes communs à λ , α et β :

$$\begin{aligned} U &= [\bar{1},898339] + [\bar{4},391296] \cos v_2 - [\bar{4},111078] \cos(v_2 + \alpha_2) \\ &\quad - [\bar{3},264264] \cos(v_2 - \alpha_2) + [\bar{4},314582] \cos 2v_2, \\ \varepsilon &= [\bar{2},737536] + [\bar{4},915654] \cos \alpha_2 + [\bar{3},55204] \cos v_2 \\ &\quad - [\bar{3},384896] \cos 2\alpha_2 - [\bar{4},749695] \cos 2v_2 + [\bar{3},373542] \cos(v_2 + \alpha_2) \\ &\quad - [\bar{2},521838] \cos(v_2 - \alpha_2) - [\bar{3},489842] \cos 2(v_2 - \alpha_2) \\ &\quad - [\bar{4},69897] \cos(2v_2 + \alpha_2), \\ \iota &= [\bar{2},883010] - [\bar{4},553987] \cos 2\beta_2, \\ \lambda &= t + [\bar{2},733036]t + [\bar{1},262145] \sin \alpha_2 - [\bar{4},701468] \sin 2\alpha_2 + \mu + \delta_0, \\ \alpha &= [\bar{2},751750]t + [\bar{1},200346] \sin \alpha_2 + [\bar{2},371284] \sin v_2 + [\bar{2},525654] \sin 2\alpha_2 \\ &\quad - [\bar{2},861616] \sin(v_2 + \alpha_2) - [\bar{1},784302] \sin(v_2 - \alpha_2) \\ &\quad - [\bar{1},053336] \sin 2(v_2 - \alpha_2) + \mu + \alpha_0, \\ \beta &= [\bar{2},725751]t + [\bar{1},264186] \sin \alpha_2 - [\bar{4},753390] \sin 2\alpha_2 \\ &\quad + [\bar{3},670977] \sin 2\beta_2 + \mu + \beta_0, \\ \mu &= -[\bar{3},999986] \sin \alpha_2 - [\bar{1},064294] \sin v_2 - [\bar{3},576065] \sin 2\alpha_2 \\ &\quad - [\bar{3},363618] \sin 2\beta_2 + [\bar{2},306469] \sin(v_2 + \alpha_2) \\ &\quad + [\bar{2},888787] \sin(v_2 - \alpha_2) - [\bar{2},302927] \sin 2v_2. \\ x &= \bar{2},333490 + \varepsilon \cos \alpha, & \xi &= \iota \cos \beta, \\ y &= & - \varepsilon \sin \alpha, & \eta &= - \iota \sin \beta. \end{aligned}$$

Les arguments v_2 , α_2 et β_2 ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} v_2 &= 11057'', 550t + 205^{\circ}10'19'', \\ \alpha_2 &= 10828'', 875t - 15^{\circ}16'29'', \\ \beta_2 &= 10453'', 951t + 170^{\circ}23'48''. \end{aligned}$$

Nous reproduisons aussi l'expression numérique des formules qui

nous ont servi dans le calcul des perturbations à courte période :

$$\begin{aligned}
 \delta U = & [\bar{5}, 933\ 12] \cos \lambda + [\bar{4}, 481\ 61] \cos 2\lambda + [\bar{4}, 20665] \cos 3\lambda \\
 & + [\bar{5}, 971\ 82] \cos 4\lambda + [\bar{5}, 72383] \cos 5\lambda - [\bar{5}, 431\ 58] \cos(-2\lambda + \alpha) \\
 & - [\bar{5}, 36380] \cos(-\lambda + \alpha) - [\bar{5}, 78682] \cos(\lambda + \alpha) \\
 & - [\bar{5}, 691\ 93] \cos(2\lambda + \alpha) - [\bar{5}, 541\ 27] \cos(3\lambda + \alpha) \\
 & + [\bar{4}, 045\ 34] \cos(2\lambda - t + \varpi') + [\bar{5}, 800\ 53] \cos(3\lambda - t + \varpi') \\
 & + [\bar{5}, 603\ 50] \cos(4\lambda - t + \varpi') - [\bar{5}, 071\ 09] \cos(-\lambda + 2\alpha) \\
 & + [\bar{6}, 950\ 5] \cos(\lambda + 2\alpha) - [\bar{5}, 478\ 76] \cos(2\lambda - t + \alpha + \varpi'), \\
 \delta \lambda = & -[\bar{4}, 913\ 84] \sin \lambda - [\bar{4}, 964\ 79] \sin 2\lambda - [\bar{4}, 667\ 26] \sin 3\lambda \\
 & - [\bar{4}, 431\ 25] \sin 4\lambda - [\bar{4}, 173\ 85] \sin 5\lambda - [\bar{4}, 033\ 79] \sin(-2\lambda + \alpha) \\
 & - [\bar{4}, 364\ 34] \sin(-\lambda + \alpha) + [\bar{4}, 709\ 49] \sin(\lambda + \alpha) \\
 & + [\bar{4}, 441\ 59] \sin(2\lambda + \alpha) + [\bar{4}, 202\ 25] \sin(3\lambda + \alpha) \\
 & + [\bar{4}, 241\ 64] \sin(-t + \varpi') - [\bar{4}, 581\ 16] \sin(2\lambda - t + \varpi') \\
 & - [\bar{4}, 293\ 95] \sin(3\lambda - t + \varpi') - [\bar{4}, 074\ 96] \sin(4\lambda - t + \varpi') \\
 & + [\bar{4}, 023\ 86] \sin(-\lambda + 2\alpha) - [\bar{4}, 082\ 31] \sin(\lambda + 2\alpha) \\
 & - [\bar{4}, 131\ 68] \sin(-t + \alpha + \varpi') + [\bar{4}, 244\ 74] \sin(2\lambda - t + \varpi' + \alpha), \\
 \delta x = & +[\bar{4}, 746\ 91] \cos \lambda + [\bar{4}, 200\ 50] \cos 2\lambda + [\bar{4}, 18900] \cos 3\lambda \\
 & + [\bar{4}, 46383] \cos(-\lambda + \alpha) - [\bar{4}, 39029] \cos(\lambda + \alpha) \\
 & - [\bar{4}, 36886] \cos(-t + \varpi') + [\bar{4}, 31647] \cos(2\lambda - t + \varpi'), \\
 \delta y = & +[\bar{3}, 053\ 49] \sin \lambda + [\bar{4}, 701\ 50] \sin 2\lambda + [\bar{4}, 18900] \sin 3\lambda \\
 & + [\bar{4}, 46383] \sin(-\lambda + \alpha) - [\bar{4}, 39029] \sin(\lambda + \alpha) \\
 & - [\bar{4}, 36886] \sin(-t + \varpi') + [\bar{4}, 31647] \sin(2\lambda - t + \varpi'), \\
 \int \partial a \partial t = & -[\bar{4}, 804\ 81] \sin \lambda - [\bar{3}, 051\ 77] \sin 2\lambda - [\bar{4}, 601\ 08] \sin 3\lambda \\
 & - [\bar{4}, 241\ 72] \sin 4\lambda - [\bar{5}, 897\ 19] \sin 5\lambda - [\bar{5}, 71282] \sin(-2\lambda + \alpha) \\
 & + [\bar{4}, 93661] \sin(\lambda + \alpha) + [\bar{4}, 42739] \sin(2\lambda + \alpha) \\
 & + [\bar{4}, 05365] \sin(3\lambda + \alpha) + [\bar{4}, 19836] \sin(-t + \varpi' + \alpha) \\
 & + [\bar{4}, 48212] \sin(2\lambda - t + \alpha + \varpi') - [\bar{5}, 99213] \sin(-\lambda + 2\alpha) \\
 & - [\bar{4}, 25549] \sin(\lambda + 2\alpha) - [\bar{4}, 85971] \sin(2\lambda - t + \varpi') \\
 & - [\bar{4}, 35945] \sin(3\lambda - t + \varpi') - [\bar{5}, 99055] \sin(4\lambda - t + \varpi').
 \end{aligned}$$

Le Tableau suivant résume les résultats du calcul avec ces formules. Les éléments elliptiques du mouvement sont rapportés à l'écliptique et l'équinoxe moyen de 1850,0.

Opposition.	log a.	Long. périh.	Anom. moy.	Excentr.	Ascensions droites		O — C.
					observées.	calculées.	
1869...	0,506897	173.12.18,7	11.37.29,7	5.43'38"	12. 0.35,1	0.26,7	+ 8,4
1871...	0,506395	173.14.32,8	163.37.56,0	5.48.36	22.30.44,7	30.32,3	+12,4
1874...	0,506481	173.17.45,5	310.11.51,5	5.49. 5	7.42.38,2	42.53,5	—15,3
1875...	0,507011	172.49.14,0	29.40.38,0	5.52.30	13.35. 0,5	35. 6,5	— 6,0
1876...	0,506339	171.48.39,7	107.25.14,3	5.53.53	19.27.47,7	27.42,9	+ 4,8
1877...	0,506431	171.17. 8,5	181. 3.28,9	5.51.45	23.35.23,6	35.16,7	+ 6,9
1881...	0,506851	170.49.34,1	52.51.38,1	5.52.55	14.59.40,2	59.52,6	—12,4
1886...	0,506699	170.32. 9,6	350.53.56,2	5.59.55	10.54.39,0	54.57,5	—18,5
1887...	0,506421	169.40.22,1	72.55.14,9	6. 1. 0	16.34.57,1	35.10,9	—13,8
1889...	0,506481	169.27.48,7	219.51.23,1	5.57.44	1.19.59,6	20.17,7	—18,1
1892...	0,506737	168.50.14,5	13.19.14,9	5.57.52	12.20.21,3	20. 9,1	+12,2
1894...	0,506341	168.22.12,1	166. 4. 5,7	6. 0.37	22.40.25,6	40.25,7	— 0,1
1895...	0,506125	168.34.56,2	240.29.21,2	6. 1.30	2.13.31,8	13.36,1	— 4,3
1898...	0,506519	167.32.16,3	35.56.33,9	6. 5.55	13.44. 8,3	43.49,8	+18,5
1899...	0,506093	167. 8.18,4	111. 4. 6,4	6. 4. 5	19.39.38,7	39.44,2	— 5,5
1901...	0,506369	167.13.44,1	260.20. 1,3	6. 3. 2	3.24.32,1	24.24,0	+ 8,1

Opposition.	Long. nœud.	Inclin.	Déclinaisons		O — C.
			observées.	calculées.	
1869...	352.14. 9,9	4.25.13"	— 1.58'30"	56.25"	— 2. 5"
1871...	352.13.12,5	4.25. 7	— 10.44. 4	47.17	+ 3.13
1874...	352. 6.33,9	4.24.43	+ 26.59.22	59.35	— 0.13
1875...	352. 7.32,6	4.24.34	— 14.13.50	14.16	+ 0.26
1876...	352. 8.26,3	4.24.35	— 27.33.36	35.38	+ 2. 2
1877...	352. 1.21,1	4.24.22	— 2.37.46	39.34	+ 1.48
1881...	351.58.27,2	4.23.58	— 23. 1.43	2.32	+ 0.49
1886...	351.51. 8,0	4.23.38	+ 8.32.32	30.18	+ 2.14
1887...	351.55.21,1	4.23.44	— 28.28.27	29.19	+ 0.52
1889...	351.49.48,6	4.23.21	+ 11.48.51	50.38	— 1.47
1892...	351.47.51,4	4.23. 9	— 3.55. 6	53. 8	— 1.58
1894...	351.45.40,0	4.23. 6	— 10. 5. 0	5. 6	+ 0. 6
1895...	351.44.56,8	4.23. 5	+ 18.15.41	15.38	+ 0. 3
1898...	351.45.23,8	4.23. 0	— 15.20.13	17.48	— 2.25
1899...	351.42.36,3	4.22.57	— 27. 9.26	7.51	— 1.35
1901...	351.39.30,9	4.22.48	+ 24.29.10	28. 5	+ 1. 5

Vu et approuvé :

Paris, le 6 juillet 1912.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 6 juillet 1912.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie de la figure des Comètes.

Vu et approuvé :

Paris, le 6 juillet 1912.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 6 juillet 1912.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
50493 Quai des Grands-Augustins, 55
